Università di Pisa

Dipartimento di Matematica

La decomposizione di Bruhat e il teorema di Borel-Weil

Tesi di Laurea Triennale in Matematica

Candidato
Eduardo Venturini

Relatore
Prof. **Andrea Maffei**
Università di Pisa

Anno Accademico 2021-2022

Indice

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è dimostrare in primo luogo la decomposizione di Bruhat e successivamente il teorema di Borel-Weil.

Innanzitutto introduciamo alcuni concetti necessari a enunciare questi risultati. Consideriamo un gruppo algebrico lineare G, cioè una varietà algebrica affine su un campo k algebricamente chiuso sulla quale è definita una struttura di gruppo le cui operazioni sono morfismi. Si può dimostrare che G è isomorfo a un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n$, utilizzeremo questo isomorfismo per guidare l'intuito sui vari concetti che ora verranno introdotti.

Chiamiamo radicale unipotente di G e indichiamo con $R_u(G)$ il sottogruppo chiuso, connesso, normale e costituito da elementi unipotenti massimale per queste proprietà. Aggiungiamo alle ipotesi che G sia connesso e che sia riduttivo, cioè che $R_u(G) = \{e\}$.

Un sottogruppo di Borel B di G è un sottogruppo chiuso, connesso, risolubile e massimale. Tale sottogruppo esiste sempre ed è unico a meno di coniugio. Nel caso $G = \mathbf{GL}_n$, B coincide, a meno di coniugio, con il sottogruppo delle matrici triangolari superiori.

Un un toro massimale T di G è un sottogruppo di G isomorfo a un gruppo di matrici diagonali $\mathbb{D}_n$ e massimale per questa proprietà. Tale sottogruppo esiste sempre, è unico a meno di coniugio e possiamo assumere sia contenuto in B. Nel caso $G = \mathbf{GL}_n$, T coincide, a meno di coniugio, con il sottogruppo delle matrici diagonali.

Definiamo il gruppo di Weyl W di (G, T) come $N_G(T)/Z_G(T)$, cioè come quoziente del normalizzatore di T per il centralizzatore di T. W è un gruppo finito e agisce fedelmente sulle radici, permutandole. Per ogni elemento $w \in W$ indichiamo con $\dot{w} \in N_G(T)$ un suo rappresentante.

Enunciamo ora la decomposizione di Bruhat:

Teorema (Decomposizione di Bruhat)**.**
G è unione disgiunta delle classi laterali doppie $C(w) = B\dot{w}B$:

$$G = \bigsqcup_{w \in W} C(w) = \bigsqcup_{w \in W} B\dot{w}B$$

Cerchiamo ora di capire l'importanza da tale scrittura studiando più in dettaglio il sottogruppo di Borel, poi ripercorriamo i passi principali della dimostrazione.

Prima però introduciamo un concetto molto utile allo studio del sottogruppo di Borel, cioè quello di radice. Definiamo i caratteri di T come i morfismi moltiplicativi $T \to k^*$ e indichiamo il loro insieme con $X^*(T)$. Consideriamo l'azione di T sull'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G data dalla rappresentazione aggiunta: chiamiamo radici i caratteri α di T per i quali esiste $X \in \mathfrak{g}$ con $t.X = \alpha(t)X$ per ogni $t \in T$ e indichiamo il loro insieme con R.

Ad ogni radice $\alpha \in R$ possiamo associare un elemento $s_\alpha \in W$, detto riflessione. Scegliendo un insieme di radici positive R^+ e considerando il relativo sottoinsieme D di radici minimali, cioè non esprimibili come somma di radici positive, riusciamo a scrivere ogni radice di R univocamente come somma di elementi di D e ogni elemento di W come composizione di riflessioni s_α con $\alpha \in D$. In questo modo si riescono a ordinare parzialmente gli elementi di W in una gerarchia, dove da un lato c'è l'identità e dall'altro l'elemento w_0 che scambia gli insiemi R^+ e $R \setminus R^+$.

Torniamo al sottogruppo di Borel, che a questo punto è relativamente facile da studiare: possiamo decomporre B come $T \times U$, dove U è il radicale unipotente di B. Nel caso $G = \mathbf{GL}_n$, U coincide con il sottogruppo delle matrici triangolari superiori le cui entrate nella diagonale sono tutte pari ad 1. Ad ogni radice $\alpha \in R$ possiamo associare un sottogruppo U_α di G isomorfo al gruppo additivo $\mathbb{G}_a = (k, +)$, in modo che, preso un isomorfismo $u_\alpha : \mathbb{G}_a \to U_\alpha$, si abbia $tu_\alpha(x)t^{-1} = u_\alpha(\alpha(t)x)$. Nel caso $G = \mathbf{GL}_n$, ad ognuna delle $\frac{1}{2}n(n-1)$ celle non sulla diagonale è associata una radice e i relativi sottogruppi U_α sono costituiti dalle matrici aventi 1 sulla diagonale e 0 altrove tranne che su una specifica cella fuori dalla diagonale. Facendo agire T per coniugio su U troviamo una decomposizione di U come prodotto di U_α con $\alpha \in R^+$. Infine è possibile scrivere il commutatore di due elementi $u_\alpha(x) \in U_\alpha$, $u_\beta(y) \in U_\beta$ come funzione regolare utilizzando i vari u_γ al variare di $\gamma \in R^+$ in un modo deducibile esclusivamente dall'insieme delle radici. Se $G = \mathbf{GL}_n$, tutti i precedenti passaggi sono relativamente intuitivi e facilmente verificabili a mano. In questo modo abbiamo caratterizzato completamente la struttura di gruppo di B, riconducendola a un prodotto di gruppi additivi $(k, +)$ e moltiplicativi $(k, *)$ che interagiscono fra loro nel modo descritto dalle radici, oggetto combinatorico finito che si può studiare senza eccessive difficoltà.

Il discorso appena fatto non solo lascia intuire l'importanza della decomposizione di Bruhat, ma ci permette anche di dare un'idea della sua dimostrazione. Sappiamo che gli elementi di W permutano i gruppi U_α ($\alpha \in R$), i quali, insieme a T, generano G. Mettendo in relazione la struttura di W con il prodotto di alcune classi laterali doppie $C(s).C(w)$ si riesce a vedere che $\bigcup_{w\in W} C(w)$ è stabile per l'azione di T e di ogni U_α, da cui $\bigcup_{w\in W} C(w) = G$. Inoltre, sfruttando la gerarchia definita su W, si trova che $C(w) \cap C(w') = \emptyset$ per $w \neq w'$, dimostrando che $G = \bigsqcup_{w\in W} C(w)$.

Questa prima parte si articola nei primi quattro capitoli, la cui referenza principale è rappresentata da [Spr98].

Nel primo capitolo si introducono i gruppi algebrici lineari con tutti i concetti collegati, fra cui quelli presentati nel precedente paragrafo, poi si enunciano, senza dimostrazione, le loro principali proprietà. Questo capitolo è pensato come un riepilogo di una parte di teoria che dovrebbe essere già nota, nel quale a volte si cercano di fornire le idee che stanno alla base di un risultato, ma senza mai scendere troppo nel dettaglio, inoltre è utile per fissare le notazioni. Per approfondire ulteriormente alcune parti di questo capitolo, in particolare quelle riguardanti l'algebra di Lie, si rimanda anche a [Hum75].

I successivi tre capitoli sono invece molto più dettagliati e i risultati ottenuti vengono dimostrati rigorosamente.

Il secondo capitolo tratta i sistemi di radici, oggetti puramente combinatorici che, almeno fino a questo punto, non hanno relazioni con i gruppi algebrici o con la teoria precedentemente introdotta. Fra le nozioni discusse nel primo paragrafo, qui possiamo trovare le riflessioni, le radici semplici, e la gerarchia su W. Per approfondire maggiormente questi argomenti si rimanda a [Hum72].

Il terzo capitolo rappresenta un ponte fra i sistemi di radici e i gruppi algebrici: si introduce il dato di radici, inizialmente come oggetto combinatorico a sé stante, poi si associa ad esso un sistema di radici e infine si mostra come ad ogni gruppo algebrico lineare sia associato un dato di radici. In questo modo sarà possibile applicare tutta la teoria sviluppata nel secondo capitolo ai nostri gruppi.

Il quarto capitolo ha lo scopo di dimostrare la decomposizione di Bruhat e per raggiungere tale obbiettivo si avvale ampiamente della teoria sviluppata nel secondo capitolo, come mostrato nella discussione precedente.

Il teorema di Borel-Weil risolve il problema della classificazione delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi algebrici lineari riduttivi a meno di isomorfismo, fornendo un rappresentante canonico per ognuna di esse.

Dato un gruppo algebrico lineare riduttivo G, una rappresentazione di G è un'azione razionale di G su uno spazio vettoriale M costituita da mappe lineari. Dato uno spazio vettoriale M su cui è definita una rappresentazione di G, diremo che M è un G-modulo. Un G-modulo M si dice semplice e la relativa rappresentazione irriducibile se M è non nullo e gli unici G-sottomoduli di M, cioè i sottospazi vettoriali di M che siano anche G-moduli con l'azione indotta, sono 0 e M.

Definiamo i cocaratteri di T come i morfismi moltiplicativi $k^* \to T$ e indichiamo il loro insieme con $X_*(T)$. Ad ogni radice α possiamo associare una coradice $\alpha^\vee \in X_*(T)$. Definito l'accoppiamento $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fra $X^*(T)$ e $X_*(T)$, una funzione bilineare che, fra le altre proprietà, soddisfa $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$, possiamo introdurre l'insieme dei pesi dominanti

$$X(T)_+ = \{\chi \in X^*(T) \mid \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \quad \forall \alpha \in R^+\}$$

I pesi dominanti sono particolarmente importanti in quanto in bigezione con le rappresentazioni irriducibili di G a meno di isomorfismo. Preso $\chi \in X^*(T)$ sia

$$H^0(\chi) = \{f \in k[G] \mid f(gb) = \chi(b)^{-1} f(g) \quad \forall g \in G, b \in B^-\}$$

dove B^- è il sottogruppo di Borel di G dato da $B^- = \dot{w}_0 B \dot{w}_0{}^{-1}$. Chiamiamo $B^+ = B$, U^+ il radicale unipotente di B^+ e U^- il radicale unipotente di B^-. Nel caso in cui $G = \mathbf{GL}_n$

e B^+ è il sottogruppo delle matrici triangolari superiori, B^- coincide con il sottogruppo delle matrici triangolari inferiori.

Dato un G-modulo M, indichiamo con $\operatorname{soc}_G M$ la somma diretta di tutti i G-sottomoduli semplici di M. Si verifica facilmente che $\operatorname{soc}_G M$ è un sottomodulo di M. Preso $\chi \in X^*(T)$ sia

$$L(\chi) = \operatorname{soc}_G H^0(\chi)$$

In caratteristica 0 è possibile dimostrare che $\operatorname{soc}_G M = M$ per ogni G-modulo M, quindi anche $L(\chi) = H^0(\chi)$.

A questo punto possiamo enunciare il teorema di Borel-Weil:

Teorema (Borel-Weil)**.**
L'insieme $\{L(\chi) \mid \chi \in X(T)_+\}$ fornisce un sistema di rappresentanti per le classi di isomorfismo dei G-moduli semplici.

Non è difficile mostrare che ogni $L(\chi)$ non nullo è un G-modulo semplice e che ogni G-modulo semplice è isomorfo a un qualche $L(\chi)$ non nullo. La parte interessante della dimostrazione del teorema di Borel-Weil riguarda il fatto che $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se $\chi \in X(T)_+$, lemma che notiamo mettere in relazione indirettamente le radici di G con le rappresentazioni irriducibili. Mostrare che $H^0(\chi) \neq 0$ implica $\chi \in X(T)_+$ è abbastanza facile, mentre l'altra freccia è decisamente meno banale e richiede l'uso della decomposizione di Bruhat.

Illustriamo brevemente l'idea della dimostrazione: l'obbiettivo è costruire un morfismo non nullo $f \in H^0(\chi)$. Si inizia definendo f sull'aperto denso $C(w_0)w_0^{-1} = U^+B^-$ e la si estende su $C(s_\alpha w_0)w_0^{-1} = U^+\dot{s_\alpha}B^-$ per ogni $\alpha \in D$, dove w_0 è la "riflessione totale" e le s_α per $\alpha \in D$ sono le riflessioni associate alle radici semplici, tutte definite nel primo paragrafo. A questo punto si riesce ad estendere la funzione f su tutto G grazie al teorema di estensione di Hartogs e concludere che $H^0(\chi) \neq 0$.

L'ipotesi di peso dominante è necessaria per estendere f su $U^+\dot{s_\alpha}B^-$: notando che $U^+\dot{s_\alpha}B^- \subset \dot{s_\alpha}U^+B^-$, è sufficiente estendere f ristretta a $U^+B^- \cap \dot{s_\alpha}U^+B^-$ su $\dot{s_\alpha}U^+B^-$; si vede poi che

$$\dot{s_\alpha}U^+B^- \simeq U^+_{\sim\alpha} \times k \times T \times U^-$$
$$U^+B^- \cap \dot{s_\alpha}U^+B^- \simeq U^+_{\sim\alpha} \times k^* \times T \times U^-$$

dove $U^+_{\sim\alpha} = \prod_{\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}} U_\beta$. Presi $(u_1, x, t, u) \in U^+_{\sim\alpha} \times k^* \times T \times U^-$ troviamo

$$f(u_1\dot{s_\alpha}u_\alpha(x)tu) = \chi(t)^{-1}(-x)^{\langle\chi,\alpha^\vee\rangle}$$

e l'ipotesi $\langle\chi, \alpha^\vee\rangle \geq 0$ ci permette di definire f per $x = 0$, estendendola su $\dot{s_\alpha}U^+B^-$.

Questa seconda parte si articola negli ultimi due capitoli e la referenza principale è rappresentata da [Jan03].

Il quinto capitolo, in modo simile al primo, è costituito da definizioni ed enunciati senza dimostrazione, pensato come un insieme di prerequisiti utili da consultare e per fissare le notazioni in vista del sesto capitolo. A differenza del primo, la quantità di teoria richiesta è molto più ridotta.

Il sesto capitolo ha come scopo la dimostrazione del teorema di Borel-Weil. Dopo alcune proprietà generali delle rappresentazioni, si procede direttamente alla dimostrazione, illustrata brevemente nel precedente paragrafo.

Infine si mostra una seconda forma del teorema di Borel-Weil, nella quale i rappresentanti per le classi di isomorfismo delle rappresentazioni irriducibili sono costruiti in modo più geometrico e tangibile.

Parte I

Gruppi Algebrici Lineari

Capitolo 1

Prerequisiti

1.1 Gruppi Algebrici Lineari

In questa sezione introdurremo il concetto di gruppo algebrico lineare ed alcune sue proprietà legate alla topologia sottostante.

Lungo tutta la tesi indicheremo con k un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0 e ogni varietà algebrica sarà considerata sul campo k.

Definizione 1.1.1 (Gruppo Algebrico)**.**
Un *gruppo algebrico* G è una varietà algebrica dotata di una struttura di gruppo, in modo che le mappe di moltiplicazione $\mu : G \times G \to G$ con $\mu(x, y) = xy$ e di inversione $i : G \to G$ con $i(x) = x^{-1}$ siano morfismi di varietà. Se G è una varietà affine, G si dice *gruppo algebrico lineare.*

Un *omomorfismo di gruppi algebrici* è una mappa $\phi : G \to G'$ con la proprietà di essere sia un morfismo di varietà che un omomorfismo di gruppi. Introduciamo anche le nozioni di prodotto diretto $G \times G'$ e di sottogruppo $H < G$, richiedendo sia le ovvie proprietà della teoria dei gruppi che la struttura di varietà.

1.1.2. Indicheremo con $\mathbb{G}_a$ il gruppo additivo di k, cioè $(k, +)$, e con $\mathbb{G}_m$ il gruppo moltiplicativo di k, cioè $(k^*, \cdot)$. Notiamo che entrambi sono gruppi algebrici lineari: il primo caso è immediato, nel secondo basta notare che $k[\mathbb{G}_m] = k[x, x^{-1}] \simeq k[x, y]/(xy-1)$.

1.1.3. Sia G un gruppo algebrico lineare. I morfismi μ e i definiscono e allo stesso tempo sono definiti dai corrispettivi omomorfismi di algebre $\Delta : k[G] \to k[G] \otimes k[G]$, detto *comoltiplicazione*, e $\iota : k[G] \to k[G]$, detto *antipodo*. Inoltre all'elemento identità $e \in G$ corrisponde un omomorfismo $\epsilon : k[G] \to k$.

Gli assiomi di gruppo che μ, i ed e soddisfano si traducono nelle seguenti relazioni fra

Δ, ι e ϵ:

$$(\mathrm{Id}\otimes\Delta)\circ\Delta = (\Delta\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta$$
$$(\epsilon\,\overline{\otimes}\,\mathrm{Id})\circ\Delta = \mathrm{Id} = (\mathrm{Id}\,\overline{\otimes}\epsilon)\circ\Delta$$
$$(\iota\,\overline{\otimes}\,\mathrm{Id})\circ\Delta = \overline{\epsilon} = (\mathrm{Id}\,\overline{\otimes}\iota)\circ\Delta$$

dove denotiamo con $\phi\overline{\otimes}\psi$ la mappa $a\otimes b \mapsto \phi(a)\psi(b)$ e con $\overline{\epsilon}$ l'endomorfismo $a \mapsto \epsilon(a)1_{k[G]}$.

Enunciamo ora alcuni teoremi che utilizzeremo nei successivi capitoli. Tali risultati discendono da considerazioni legate alla topologia di Zariski e dal fatto che, per $g \in G$, le traslazioni sinistra $x \mapsto gx$ e destra $x \mapsto xg^{-1}$ sono isomorfismi di G, fatto importante che verrà riutilizzato molto frequentemente.

Teorema 1.1.4.

(i) Esiste un'unica componente irriducibile G^0 di G contenente e, inoltre tale componente è un sottogruppo chiuso normale di indice finito;

(ii) Le componenti irriducibili e le componenti connesse coincidono.

Teorema 1.1.5. *Sia $\phi : G \to G'$ un omomorfismo di gruppi algebrici, allora $\phi(G)$ è un sottogruppo chiuso di G'.*

Teorema 1.1.6. *Sia $(G_i)_{i\in I}$ una famiglia di sottogruppi di G chiusi e connessi, allora il sottogruppo H da essi generato è chiuso e connesso.*

1.2 Rappresentazioni

Questa sezione tratta principalmente di rappresentazioni di gruppi. Inizialmente definiremo un concetto più generale che è quello di G-spazio, il quale non è strettamente necessario per i risultati che andremo qui ad enunciare, ma tornerà utile per la successiva trattazione dello spazio quoziente e per altre future proposizioni e dimostrazioni. Mostreremo come con le rappresentazioni si riescono a estrapolare alcune proprietà di un gruppo algebrico lineare, fra cui l'importante teorema che stabilisce un isomorfismo fra tale gruppo e un sottogruppo chiuso di matrici e la decomposizione di Jordan nella quale ogni elemento del gruppo viene visto come prodotto di un elemento semi-semplice e di uno unipotente, esattamente come per le matrici.

Definizione 1.2.1 (G-spazio)**.**
Un *G-spazio*, detto anche *G-varietà*, è una varietà X sulla quale è definita un'azione sinistra di G, dove tale azione è un morfismo tra le varietà $G \times X$ e X.

Un G-spazio X si dice *omogeneo* per G se la relativa azione è transitiva.

Dati due G-spazi X e Y e un morfismo $\phi : X \to Y$, questo si dice *equivariante* se $\phi(g.x) = g.\phi(x)$ per ogni $g \in G, x \in X$.

Utilizzando alcuni fatti topologici legati ai morfismi e applicati all'azione di G su X si riesce a mostrare il seguente:

Teorema 1.2.2. *Sia X un G-spazio e sia $x \in X$, allora l'orbita $G.x$ è aperta nella sua chiusura.*

Concentriamoci da ora in poi solo sulle rappresentazioni.

Definizione 1.2.3 (Rappresentazione e G-Modulo)**.**
Sia M un k-spazio vettoriale su cui è definita un'azione sinistra di G costituita da mappe lineari. Diciamo che M è un *G-modulo razionale*, o semplicemente un *G-modulo*, se per ogni $m \in M$ esiste un sottospazio vettoriale $M' \subset M$ di dimensione finita stabile per l'azione di G e contenente m, sul quale l'azione ristretta $G \times M' \to M'$ è un morfismo di varietà.

Chiamiamo *rappresentazione razionale* di G su M, o semplicemente *rappresentazione*, l'azione associata a un qualche G-modulo. Nel caso M sia finito, le rappresentazioni di G su M si possono identificare con gli omomorfismi di gruppi algebrici $G \to \mathbf{GL}(M)$.

Notiamo inoltre che l'azione $r : G \times M \to M$ induce un'azione sullo spazio proiettivo $\mathbb{P}(M)$, dotando quest'ultimo di una struttura di G-spazio.

Supponiamo per il resto della sezione che G sia un gruppo algebrico lineare.

1.2.4. Sia X un G-spazio affine, con un'azione $a : G \times X \to X$. In modo simile a quanto visto per la comoltiplicazione, l'azione a induce un omomorfismo di k-algebre $a^* : k[X] \to k[G] \otimes k[X]$. Definiamo $s : G \times k[X] \to k[X]$ come

$$s(g)(f)(x) = f(g^{-1}x) \qquad (g \in G, x \in X, f \in k[X])$$

in modo che, se $a^*(f) = \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes f_i$, allora

$$s(g)(f) = \sum_{i=1}^{n} u_i(g^{-1})f_i \qquad (g \in G, f \in k[X])$$

Dalla definizione vediamo che $s(g)$ è una mappa lineare e invertibile su $k[X]$, quindi una rappresentazione di gruppi astratti (senza richiedere la proprietà di morfismo) di G su $k[X]$.

Il prossimo risultato mostra che $k[X]$ è un G-modulo, quindi s si può costruire come unione di rappresentazioni finite. La dimostrazione si basa sul fatto che $s(\cdot)(f)$ è somma di un numero finito di elementi di $u_i \otimes f_i \in k[G] \otimes k[X]$ e lo span dei vari f_i andrà a formare un sottospazio di dimensione finita dentro cui trovarne uno G-stabile.

Proposizione 1.2.5. *Se V è un sottospazio di $k[X]$ di dimensione finita, allora esiste un sottospazio W di $k[X]$ di dimensione finita contenente V e stabile per l'azione di ogni $s(g)$ ($g \in G$).*

1.2.6. Nel caso particolare in cui $X = G$, denotiamo con λ la mappa s e notiamo che agisce per traslazione sinistra:

$$\lambda(g)(f)(x) = f(g^{-1}x) \qquad (g, x \in G, f \in k[G])$$

In modo simile definiamo la mappa $\rho : G \times k[G] \to k[G]$ che agisce per traslazione destra:

$$\rho(g)(f)(x) = f(xg) \qquad (g, x \in G, f \in k[G])$$

I risultati trovati per s, quindi per λ, valgono in modo simmetrico anche per ρ, quindi λ e ρ sono rappresentazioni di G su $k[G]$.

Notando che $k[G]$ è generato da un numero finito di elementi, si può trovare un sottospazio finito stabile per l'azione di ρ che li contiene tutti. Questa idea conduce al seguente teorema:

Teorema 1.2.7. *Esiste un isomorfismo di G su un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n$ per qualche n.*

Introduciamo ora i concetti di semi-semplice e unipotente e vediamo come la decomposizione di Jordan, già nota per le matrici, si applica nel caso dei gruppi.

1.2.8. Sia V un k-spazio vettoriale di dimensione finita. Un endomorfismo a di V si dice *semi-semplice* se esiste una base di V costituita da autovettori di a, cioè se a, rappresentato come matrice, è diagonalizzabile. Un endomorfismo a di V si dice *nilpotente* se $a^s = 0$ per qualche $s \geq 1$ e si dice *unipotente* se $a - \mathrm{Id}$ è nilpotente.

Proposizione 1.2.9 (Decomposizione di Jordan moltiplicativa)**.**
Dato $a \in GL(V)$, esistono unici $a_s, a_u \in GL(V)$ tali che a_s è semi-semplice, a_u è unipotente e $a = a_s a_u = a_u a_s$.

1.2.10. Sia V un k-spazio vettoriale, di dimensione non necessariamente finita, e sia $a \in End(V)$ un suo endomorfismo. Diciamo che a è *localmente finito* se V è unione di sottospazi di dimensione finita stabili per l'azione di a. Diciamo che a è *semi-semplice* se la sua restrizione ad ogni sottospazio stabile per la sua azione è semi-semplice, ed è *localmente nilpotente* se tale restrizione è nilpotente. Infine diciamo che a è *localmente unipotente* se $a - \mathrm{Id}$ è localmente nilpotente. Notiamo che queste definizioni sono compatibili con quelle fornite per spazi di dimensione finita.

Se $a \in GL(V)$ è localmente finito, riconducendoci al caso finito-dimensionale, possiamo trovare univocamente $a_s, a_u \in GL(V)$ tali che a_s è semi-semplice, a_u è localmente unipotente e $a = a_s a_u = a_u a_s$.

Per quanto appena visto, la traslazione destra $\rho(g)$ è un elemento localmente finito di $GL(k[G])$ per ogni $g \in G$, quindi esiste una sua decomposizione di Jordan $\rho(g) = \rho(g)_s \rho(g)_u$.

Teorema 1.2.11 (Decomposizione di Jordan per gruppi).

(i) *Per ogni* $g \in G$ *esistono unici* $g_s, g_u \in G$ *tali che* $\rho(g_s) = \rho(g)_s$, $\rho(g_u) = \rho(g)_u$ *e* $g = g_s g_u = g_u g_s$;

(ii) *Se* $\phi : G \to G'$ *è un omomorfismo di gruppi algebrici, allora* $\phi(g_s) = \phi(g)_s$ *e* $\phi(g_u) = \phi(g)_u$;

(iii) *Se* $G = \mathbf{GL}_n$, *allora* g_s *e* g_u *sono le parti semi-semplici e unipotenti della decomposizione di Jordan moltiplicativa di* g.

Definizione 1.2.12 (Elemento Semi-Semplice e Unipotente).
Sia G un gruppo algebrico lineare. Diciamo che un elemento $g \in G$ è *semi-semplice* se $g = g_s$ e che è *unipotente* se $g = g_u$.

Corollario 1.2.13. *Un elemento* $g \in G$ *è semi-semplice se e solo se per ogni isomorfismo* ϕ *di* G *su un sottogruppo chiuso di qualche* $\mathbf{GL}_n$ *si ha che* $\phi(g)$ *è semi-semplice. Allo stesso modo* g *è unipotente se e solo se lo è* $\phi(g)$ *per ogni* ϕ.

Definizione 1.2.14 (Gruppo Unipotente).
Sia G un gruppo algebrico lineare. Diciamo che G è *unipotente* se costituito da elementi unipotenti.

Teorema 1.2.15. *Sia* G *un sottogruppo di* $\mathbf{GL}_n$ *costituito da matrici unipotenti, allora esiste* $x \in \mathbf{GL}_n$ *tale che* $xGx^{-1} \subset \mathbf{U}_n$.

Diamo ora un'ultima definizione, quella di gruppo nilpotente. Dati due elementi x, y di un gruppo, sia $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$ il loro commutatore.

Definizione 1.2.16 (Gruppo Nilpotente).
Un gruppo H si dice *nilpotente* se esiste un intero n per cui, per ogni n-upla di elementi $x_1, \ldots, x_n \in H$, i loro commutatori iterati sono banali, cioè si ha $(x_1, (x_2, \ldots (x_{n-2}, (x_{n-1}, x_n)) \ldots)) = e$.

Corollario 1.2.17. *Un gruppo algebrico lineare unipotente è nilpotente, quindi risolubile.*

1.3 Caratteri e Cocaratteri

In questa sezione parleremo dei caratteri, una categoria di rappresentazioni particolarmente semplici in quanto di dimensione 1, e dei cocaratteri, una sorta di duale dei caratteri. Introdurremo anche i gruppi diagonalizzabili e i tori, gruppi sui quali i caratteri e i cocaratteri assumeranno una certa importanza.

Per tutta la sezione sia G un gruppo algebrico lineare.

Definizione 1.3.1 (Carattere)**.**
Un omomorfismo di gruppi algebrici $\chi : G \to \mathbb{G}_m$ si dice *carattere razionale* o più semplicemente *carattere*. L'insieme dei caratteri si denota con $X^*(G)$ ed è dotato di una naturale struttura di gruppo abeliano indotta da quella di $\mathbb{G}_m$; scriveremo l'operazione di gruppo additivamente.

Definizione 1.3.2 (Cocarattere)**.**
Un omomorfismo di gruppi algebrici $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ si dice *cocarattere*. L'insieme dei cocaratteri si denota con $X_*(G)$ e, se G è commutativo, anch'esso è dotato di una naturale struttura di gruppo abeliano indotta da quella di G; in tale caso scriveremo l'operazione di gruppo additivamente.

Definizione 1.3.3 (Gruppi Diagonalizzabili e Tori)**.**
Sia $\mathbb{D}_n$ il gruppo delle matrici diagonali non singolari di rango n. Un gruppo algebrico lineare D è *diagonalizzabile* se è isomorfo a un sottogruppo chiuso di $\mathbb{D}_n$ per un qualche n. Un gruppo algebrico lineare T si dice *toro* se è isomorfo a $\mathbb{D}_n$ per un qualche n.

Scriviamo un elemento $x \in \mathbb{D}_n$ come $\operatorname{diag}(\chi_1(x), \dots, \chi_n(x))$ con χ_i caratteri di $\mathbb{D}_n$. Si vede facilmente che $k[\mathbb{D}_n] = k[\chi_1, \dots, \chi_n, \chi_1^{-1}, \dots, \chi_n^{-1}]$.

Teorema 1.3.4. *I monomi $\chi_1^{a_1} \dots \chi_n^{a_n}$ con $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ formano una base di $k[\mathbb{D}_n]$ e costituiscono tutti e soli i caratteri di $\mathbb{D}_n$, da cui $X^*(\mathbb{D}_n) \simeq \mathbb{Z}^n$. Inoltre i cocaratteri di $\mathbb{D}_n$ sono tutti e soli gli omomorfismi della forma $x \mapsto \operatorname{diag}(x^{a_1}, \dots, x^{a_n})$ con $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, da cui anche $X_*(\mathbb{D}_n) \simeq \mathbb{Z}^n$.*

I due seguenti teoremi mettono in stretta relazione la diagonalizzabilità e la proprietà di essere un toro con il gruppo dei caratteri. La terza condizione del prossimo teorema rivestirà in ruolo fondamentale nei successivi capitoli, dove, dato un gruppo G e un G-modulo M, troveremo un toro contenuto in G che utilizzeremo per decomporre M in sottospazi T-stabili sui quali T agisce secondo un certo carattere.

Teorema 1.3.5. *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(a) G è diagonalizzabile;

(b) $X^*(G)$ è un gruppo abeliano finitamente generato;

(c) Ogni rappresentazione di G si può esprimere come somma diretta di rappresentazioni di dimensione 1.

Teorema 1.3.6. *Sia G un gruppo diagonalizzabile.*

(i) G è un toro se e solo se è connesso;

(ii) G è un toro se e solo se $X^*(G)$ è un gruppo abeliano libero.

Il prossimo teorema è utile per descrivere le azioni per coniugio non banali di un gruppo su un suo sottogruppo diagonalizzabile. Indichiamo con $N_G(H)$ il normalizzatore di H in G, con $Z_G(H)$ il centralizzatore di H in G e con H^0 la componente connessa di H contenente e.

Teorema 1.3.7. *Se H è un sottogruppo diagonalizzabile di G allora si ha $N_G(H)^0 = Z_G(H)^0$ e $N_G(H)/Z_G(H)$ è finito.*

1.4 Tangente e Algebra di Lie

Questa sezione ha lo scopo di introdurre il concetto di spazio tangente per varietà algebriche affini per poi specializzarlo al caso dei gruppi algebrici lineari, mostrandone l'isomorfismo con l'algebra di Lie del gruppo e le varie proprietà indotte dalla struttura di gruppo.

Definizione 1.4.1 (Derivazione)**.**
Sia R un anello commutativo, A una R-algebra e M un A-modulo a sinistra. Una R-*derivazione* di A in M è una mappa R-lineare $D : A \to M$ tale che

$$D(ab) = a.D(b) + b.D(a) \qquad (a, b \in A)$$

Indichiamo con $\mathrm{Der}_R(A, M)$ l'insieme delle R-derivazioni di A in M. $\mathrm{Der}_R(A, M)$ è un A-modulo, la cui struttura è data da $(D + D')(a) = D(a) + D'(a)$, $(b.D)(a) = b.D(a)$ $(D, D' \in \mathrm{Der}_R(A, M),\ a, b \in A)$.

Sia X una varietà affine. Dato $x \in X$, possiamo costruire una struttura di $k[X]$-modulo su k che indichiamo con k_x, dove l'azione di $k[X]$ è data da $f.t = f(x)t$.

Definizione 1.4.2 (Spazio Tangente)**.**
Dato $x \in X$, definiamo lo *spazio tangente* T_xX di X nel punto x come il $k[X]$-modulo $\mathrm{Der}_k(k[X], k_x)$.

Dato un morfismo di varietà affini $\phi : X \to Y$, esso induce una mappa lineari di spazi tangenti $d\phi_x : T_xX \to T_{\phi(x)}Y$ detta *differenziale* per ogni $x \in X$. Si ha inoltre che $d\,\mathrm{Id}_X = \mathrm{Id}_{T_xX}$ e $d(\psi \circ \phi)_x = d\psi_{\phi(x)} \circ d\phi_x$.

Restringiamoci ora al caso in cui $X = G$ è un gruppo algebrico lineare.

1.4.3. Indichiamo con λ e ρ rispettivamente le rappresentazioni di G date dalle azioni sinistra e destra su $k[G]$.

Sia $\mathcal{D} = \mathcal{D}_G = \mathrm{Der}_k(k[G], k[G])$. $\mathcal{D}$ ha una struttura di algebra di Lie, in cui il bracket è dato da $[D, D'] = D \circ D' - D' \circ D$ $(D, D' \in \mathcal{D})$.

L'azione di λ su $k[G]$ induce una rappresentazione di G su $\mathcal{D}$, che indicheremo sempre con λ, data da

$$\lambda(x)D = \lambda(x) \circ D \circ \lambda(x)^{-1} \qquad (x \in G, D \in \mathcal{D})$$

In modo simile definiamo la rappresentazione ρ di G su $\mathcal{D}$ indotta da ρ. Sia $L(G)$ il sottoinsieme di $\mathcal{D}$ contenente le derivazioni che commutano con $\lambda(x)$ per ogni $x \in G$ (cioè sulle quali la rappresentazione λ agisce banalmente). Notiamo che $L(G)$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathcal{D}$, stabile sotto l'azione di $\rho(x)$ ($x \in G$) in quanto $\lambda(x)$ e $\rho(x)$ commutano.

Chiameremo $L(G)$ l'algebra di Lie del gruppo G.

I tre seguenti enunciati mostrano che possiamo identificare $L(G)$ con lo spazio tangente nell'identità, andando a definire una struttura di algebra di Lie e di G-modulo su tale spazio.

Sia $\alpha = \alpha_G : \mathcal{D} \to T_eG$ la mappa lineare data da $(\alpha D)(f) = (Df)(e)$.

Proposizione 1.4.4. *α induce un isomorfismo di spazi vettoriali $L(G) \simeq T_eG$;*

Forti di questo risultato, possiamo definire la *rappresentazione aggiunta* $\mathrm{Ad}(x)$ di G su T_eG come $\mathrm{Ad}(x) = \alpha \circ \rho(x) \circ \alpha^{-1}$.

Proposizione 1.4.5. Ad *è una rappresentazione razionale di G su T_eG.*

Sia H un sottogruppo chiuso di G e sia $J \subset k[G]$ l'ideale delle funzioni che si annullano in H, in modo che $k[H] = k[G]/J$. Poniamo $\mathcal{D}_{G,H} = \{D \in \mathcal{D}_G \mid D(J) \subset J\}$. $\mathcal{D}_{G,H}$ è una sottoalgebra dell'algebra di Lie $\mathcal{D}_G$, che può immergersi in quest'ultima tramite un omomorfismo iniettivo di algebre di Lie ϕ.

Lemma 1.4.6. *ϕ definisce un isomorfismo fra $\mathcal{D}_{G,H} \cap L(G)$ e $L(H)$.*

Indicheremo da ora in poi le algebre di Lie dei gruppi algebrici lineari $G, H, \ldots$ con le lettere $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \ldots$.

Dato un omomorfismo di gruppi algebrici $\phi : G \to G'$, chiamiamo *differenziale* e indichiamo con $d\phi$ la mappa $d\phi_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ precedentemente definita con lo stesso nome, senza specificare che viene considerata nell'identità e omettendo l'identificazione fra tangente e algebra di Lie.

Enunciamo un lemma che utilizzeremo in seguito per mettere in relazione sottogruppi chiusi e sottoalgebre.

Lemma 1.4.7. *Siano H, K sottogruppi chiusi di G con H connesso. Dette $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{k}$ le loro algebre di Lie, supponiamo che $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$, allora $H \subset K$.*

La dimostrazione di questo risultato si basa sul fatto che $L(H \cap K) = L(H) \cap L(K)$, fatto vero solo in caratteristica 0, che non utilizzeremo in seguito ma che, in generale, riveste una certa importanza.

1.5 Proprietà Topologiche dei Morfismi

Questa sezione raccoglie diversi concetti e risultati che, seppur apparentemente distanti, in realtà condividono alcune idee di fondo legate all'utilizzo dello spazio tangente per mostrare delle proprietà dei morfismi. Introdurremo la nozione di varietà normale, ipotesi importante per il teorema di estensione di Hartogs che utilizzeremo nell'ultimo capitolo, daremo alcune condizioni per ottenere un isomorfismo di G-spazi e mostreremo l'uguaglianza fra l'algebra di Lie di un centralizzatore e il centralizzatore di un'algebra di Lie.

Definizione 1.5.1 (Dominio e Varietà Normali)**.**
Un dominio d'integrità A si dice *normale* se ogni elemento del suo campo delle frazioni che è intero su A appartiene ad A. Data una varietà irriducibile X, un punto $x \in X$ si dice *normale* se esiste un intorno affine aperto U di x tale che $k[U]$ è normale. La varietà X si dice *normale* se tutti i suoi punti sono normali.

Lemma 1.5.2. *Dato un gruppo algebrico G, le componenti di un G-spazio omogeneo sono normali.*

I seguenti teoremi saranno utilizzati più volte nel corso della tesi. Il fatto di lavorare in un campo di caratteristica 0 ne semplifica le ipotesi, evitando di richiedere la birazionalità e bigettività del differenziale.

Teorema 1.5.3. *Sia $\phi : X \to Y$ un morfismo bigettivo fra varietà irriducibili, di cui Y normale, allora ϕ è un isomorfismo.*

Nel caso ϕ sia un morfismo equivariante di spazi omogenei, si può utilizzare 1.5.2 e ottenere un risultato simile al precedente, che però non richiede l'irriducibilità.

Teorema 1.5.4. *Siano G un gruppo algebrico, X, Y due spazi omogenei per G e $\phi : X \to Y$ un morfismo equivariante, allora ϕ è un isomorfismo se e solo se è bigettivo. In particolare, se ϕ è un omomorfismo di gruppi algebrici, allora è un isomorfismo se e solo se è bigettivo.*

1.6 Quozienti

In questa sezione parleremo di quozienti di gruppi algebrici lineari, in particolare dato un gruppo G e un suo sottogruppo H vogliamo costruire il quoziente G/H in modo che abbia anche la struttura di varietà algebrica quasi-proiettiva. Illustreremo i principali passaggi di tale costruzione, infine mostreremo risultati analoghi per spazi più generali. Gli argomenti trattati sono necessari principalmente per la costruzione dei rappresentanti alternativi nel teorema di Borel-Weil, la quale viene illustrata alla fine dell'ultimo capitolo, ma verranno ripresi anche nel terzo e nel quarto capitolo, dove saranno utili per svolgere alcune dimostrazioni.

Siano G un gruppo algebrico lineare e H un suo sottogruppo chiuso, con le rispettive algebre di Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$.

Iniziamo definendo in modo astratto lo spazio quoziente.

Definizione 1.6.1. Un *quoziente* di G rispetto H è una coppia $(G/H, a)$ consistente in uno spazio G/H omogeneo per G e un punto $a \in G/H$ il cui stabilizzatore contiene H

tale che valga la seguente proprietà universale: per ogni coppia (Y, b) di un G-spazio Y e un punto $b \in Y$ il cui stabilizzatore contiene H, esiste un unico morfismo G-equivariante $\phi : G/H \to Y$ tale che $\phi(a) = b$.

Notiamo che l'unicità di uno spazio quoziente si può ottenere dalla proprietà universale con un argomento categoriale. Costruiamo esplicitamente un modello di spazio quoziente per mostrarne l'esistenza.

Lemma 1.6.2. *Esiste un sottospazio V di $k[G]$ di dimensione finita e un sottospazio W di V tali che*

(a) V è stabile rispetto tutte le azioni destre $\rho(x)$ $(x \in G)$;

(b) $H = \{x \in G \mid \rho(x)W = W\}$;

(c) $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid X.W \subset W\}$.

La dimostrazione di questo fatto si basa sul costruire in modo semi-esplicito gli spazi V e W: detto I l'ideale di $k[G]$ associato al chiuso H, consideriamo un insieme finito di generatori di I; a questo punto ci basta prendere come V un sottospazio di $k[G]$ di dimensione finita stabile per l'azione di ρ e contenente i generatori di I come in 1.2.5 e porre $W = V \cap I$.

Ottenuti i due sottospazi V e W come nel precedente lemma, sia $d = \dim(W)$. Vorremmo ricondurci al caso di dimensione 1, per questo motivo in consideriamo il prodotto esterno $\bigwedge^d V$ e il suo sottospazio 1-dimensionale $L = \bigwedge^d W$.

Sia ϕ la rappresentazione canonica di $GL(V)$ su $\bigwedge^d V$.

Lemma 1.6.3.

(i) Sia $x \in GL(V)$. Allora $x.W = W$ se e solo se $\phi(x).L = L$;

(ii) sia $X \in \mathfrak{gl}(V)$. Allora $X.W \subset W$ se e solo se $d\phi(X).L \subset L$.

Mettendo assieme i due risultati troviamo il seguente:

Teorema 1.6.4. *Esiste una rappresentazione razionale $\phi : G \to GL(V)$ e un vettore $v \in V$ non nullo tali che*

$$H = \{x \in G \mid \phi(x)(v) \in kv\}$$
$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\phi(X)(v) \in kv\}$$

La rappresentazione ϕ induce un'azione di G su $\mathbb{P}(V)$. Restringendo lo spazio all'orbita di $[v]$ si arriva al seguente risultato:

Corollario 1.6.5. *Esiste una varietà X quasi proiettiva omogenea per G e un punto $x \in X$ tali che:*

(a) lo stabilizzatore di x in G è H;

(b) le fibre di ψ sono le classi laterali gH $(g \in G)$.

Lo spazio (X, x) è il modello di spazio quoziente che stavamo cercando, quindi rimane solo da verificare che soddisfi la proprietà universale.

Per quest'ultima parte, si considera il quoziente di gruppi astratti G/H e si definisce su di esso il fascio di funzioni $\mathcal{O}_{G/H}$ indotto da $\mathcal{O}_G$. Per costruzione tale spazio rispetta la proprietà universale, ad eccezione del fatto che non ha ancora la struttura di varietà algebrica. Si conclude esibendo un isomorfismo G-equivariante di spazi anellati $\phi : G/H \to X$, in modo da rendere il quoziente costruito una varietà.

In questo modo si giunge al seguente teorema:

Teorema 1.6.6. *Un quoziente $(G/H, a)$ esiste ed è unico a meno di G-isomorfismo. La coppia (X, x) costruita nel precedente corollario costituisce un rappresentante di tale quoziente.*

Supponiamo ora che H sia anche normale come sottogruppo. In questo caso si può definire il quoziente G/H sia come varietà che come gruppo astratto, e la seguente proposizione mostra come le due strutture sono compatibili.

Proposizione 1.6.7. *Sia G un gruppo algebrico lineare e sia H un sottogruppo chiuso e normale di G, allora G/H è un gruppo algebrico lineare con la struttura di gruppo indotta da G.*

1.6.8. Nella costruzione del quoziente abbiamo richiesto $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\phi(X)(v) \in kv\}$: questa ipotesi ci dà un'importante condizione sul tangente di G/H, cioè $T_a(G/H) \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Nel caso in cui H è un sottogruppo normale, si trova $L(G/H) \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = L(G)/L(H)$.

Trattiamo ora un caso più generale: sia H un gruppo algebrico lineare e X un H-spazio irriducibile, vogliamo definire il quoziente X/H. Come accennato nella precedente dimostrazione, possiamo costruire uno spazio anellato $(X/H, \mathcal{O}_{X/H})$ e una mappa $\phi : X \to X/H$ continua di spazi anellati. Diciamo che il quoziente di X rispetto ad H esiste ed è X/H se ϕ è una mappa aperta e X/H ha la struttura di varietà algebrica.

1.6.9. La seguente condizione implica l'esistenza dello spazio quoziente in alcuni casi particolari. Sia G un gruppo algebrico lineare e H un suo sottogruppo chiuso, e sia $\pi : G \to G/H$ la proiezione al quoziente. Dato un aperto U di G/H, definiamo una sezione di π su U come un morfismo $\sigma : U \to G$ tale che $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$. Diciamo che π ammette sezioni locali se esiste un ricoprimento aperto finito di G/H tale che su ognuno degli aperti esiste una sezione di π.

Sia ora X un H-spazio e definiamo un'azione destra di H su $G \times X$ data da $(g, x).h = (gh, h^{-1}.x)$.

Lemma 1.6.10. *Se π ammette sezioni locali, allora esiste lo spazio quoziente $G \times_H X = (G \times X)/H$. Tale quoziente è un G-spazio per l'azione $g.[g', x] = [gg', x]$.*

L'idea alla base della dimostrazione è che, presa una sezione locale $\sigma : U \to G$, si può definire l'isomorfismo di varietà $U \times H \to \pi^{-1}(U)$ dato da $(u, h) \mapsto \sigma(u)h$, quindi l'isomorfismo $(U \times X) \times H \to \pi^{-1}(U) \times X$ dato da $(u, x; h) \mapsto (\sigma(u)h, h^{-1}.x)$. Segue che $(\pi^{-1}(U) \times X)/H \simeq ((U \times X) \times H)/H \simeq U \times X$ è uno spazio quoziente, e incollando opportunamente i quozienti $U \times X$ al variare di U fra gli aperti del ricoprimento di G/H otteniamo lo spazio quoziente $G \times_H X$.

Diciamo che $G \times_H X$ è il fibrato di G/H associato ad X.

1.7 Tori Massimali e Sottogruppi di Borel

Questa sezione e ancora di più le successive segnano un primo punto di svolta nella teoria dei gruppi algebrici lineari che abbiamo presentato fino a questo momento. D'ora in poi ci focalizzeremo sui gruppi nella loro interezza e utilizzeremo gli strumenti introdotti per proseguire nel loro studio.

In questa sezione presenteremo i tori massimali e i sottogruppi di Borel, enunceremo alcune loro proprietà ed infine presenteremo il radicale e il radicale unipotente di un gruppo.

Sia G un gruppo algebrico lineare connesso.

Definizione 1.7.1 (Sottogruppo di Borel)**.**
Un *sottogruppo di Borel* di G è un sottogruppo di G chiuso, connesso, risolubile e massimale rispetto queste tre proprietà.

Un sottogruppo di Borel di G esiste sempre, infatti l'insieme dei sottogruppi chiusi, risolubili e massimali è non vuoto, dato che contiene $\{e\} < G$, e ammette un massimo per ragioni di dimensione.

Un sottogruppo di Borel non è unico, tuttavia il prossimo teorema ci mostra come la scelta di un particolare sottogruppo non comporti una perdita di generalità.

Teorema 1.7.2. *Due sottogruppi di Borel di G sono coniugati.*

Il prossimo è un lemma sui gruppi risolubili che verrà utilizzato in una successiva dimostrazione. Pur non essendo utile all'attuale sviluppo della teoria e apparentemente estraneo agli argomenti trattati in questa sezione, viene posto qui per alcuni legami più profondi che non espliciteremo.

Si può mostrare che se G è un gruppo risolubile, allora l'insieme degli elementi unipotenti, indicato con G_u, costituisce un sottogruppo chiuso, connesso e normale.

Lemma 1.7.3. *Supponiamo G sia risolubile. Se G non è un toro, allora esiste un sottogruppo N di G chiuso e normale, isomorfo a $\mathbb{G}_a$ e contenuto nel centro di G_u.*

Introduciamo ora la nozione di toro massimale.

Definizione 1.7.4 (Toro massimale)**.**
Un sottogruppo T di G è un *toro massimale* se è un toro e non è strettamente contenuto in nessun altro sottogruppo di G che sia un toro.

Il seguente teorema è un analogo a quello riguardante i sottogruppi di Borel.

Teorema 1.7.5.

(i) Esiste un toro massimale;

(ii) Due tori massimali di G sono coniugati.

Essendo un toro chiuso, connesso e risolubile, è sempre contenuto in un sottogruppo di Borel. Il prossimo teorema mostra che si può scrivere tale sottogruppo di Borel come prodotto del toro massimale e di una parte unipotente.

Teorema 1.7.6. *Se G è risolubile e T è un toro massimale, allora la mappa $T \times G_u \to G$ indotta dal prodotto è un isomorfismo di varietà. In particolare, se G è un gruppo algebrico lineare, B è un suo sottogruppo di Borel e B_u è la relativa parte unipotente, il prodotto $T \times B_u \to B$ è un isomorfismo di varietà.*

I seguenti risultati descrivono l'azione per coniugio di gruppo sui suoi sottogruppi di Borel e tori massimali.

Teorema 1.7.7. *Sia S un toro contenuto in G.*

(i) Il centralizzatore $Z_G(S)$ è connesso;

(ii) Dato un sottogruppo di Borel B contenente S, $Z_G(S) \cap B$ è un sottogruppo di Borel di $Z_G(S)$. Inoltre ogni sottogruppo di Borel di $Z_G(S)$ può essere ottenuto in questo modo.

Teorema 1.7.8. *Sia B un sottogruppo di Borel di G, allora $N_G(B) = B$.*

Corollario 1.7.9. *Sia T un toro massimale di G e B un sottogruppo di Borel di G contenente T. La mappa $x \mapsto xQx^{-1}$ induce una bigezione di $N_G(T)/Z_G(T)$ sull'insieme dei sottogruppi di Borel contenenti T.*

Introduciamo ora le nozioni di radicale, radicale unipotente, gruppo semi-semplice e gruppo riduttivo.

1.7.10. Ricordiamo che, se N e N' sono due sottogruppi normali di G, allora $N.N'$ è a sua volta normale. In modo simile, per 1.1.6, se N e N' sono chiusi e connessi, allora anche $N.N'$ è chiuso e connesso. Infine, se N e N' sono normali e risolubili, anche $N.N'$ è risolubile: infatti G è risolubile se e solo se lo sono sia N che G/N (questo è un fatto generale vero per qualsiasi gruppo G e sottogruppo normale N), quindi ci basta mostrare che $N.N'/N$ è risolubile; ma $N.N'/N \simeq N'/(N \cap N')$, dove $N \cap N'$ è normale in N', e, sempre per il precedente fatto, dato che N' è risolubile, anche $N'/(N \cap N')$ è risolubile.

Segue che esiste un unico sottogruppo di G chiuso, connesso, normale e risolubile, massimale per queste quattro proprietà. Chiamiamo tale sottogruppo *radicale* di G e indichiamolo con $R(G)$.

1.7.11. Dato un sottogruppo di G chiuso, connesso, normale e unipotente, per 1.2.17 è anche risolubile, quindi è contenuto in $R(G)$. D'altro canto di può verificare come l'insieme $R(G)_u$ degli elementi unipotenti di $R(G)$ formi un gruppo chiuso e connesso. Tale gruppo è anche normale in quanto i coniugati di elementi unipotenti sono unipotenti e $R(G)$ è normale.

Segue che esiste un unico sottogruppo di G chiuso, connesso, normale e unipotente, massimale per queste quattro proprietà, che coincide con $R(G)_u$. Chiamiamo tale sottogruppo *radicale unipotente* e indichiamolo con $R_u(G)$.

Definizione 1.7.12 (Gruppo semi-semplice e riduttivo)**.**
Sia G un gruppo algebrico lineare. Diciamo che G è *semi-semplice* se $R(G) = \{e\}$ ed che è *riduttivo* se $R_u(G) = \{e\}$.

1.8 Radici e Gruppo di Weyl

Questa sezione è fondamentale per lo studio dei gruppi algebrici lineari, in particolar modo quelli riduttivi ai quali, per semplicità, ci restringeremo. Verranno qui introdotti le radici, le coradici e il gruppo di Weyl, tutti argomenti che si ripresenteranno in continuazione nel resto della tesi, particolarmente importanti in quanto permetteranno di ridurre lo studio dei gruppi allo studio di oggetti finiti e, in un certo senso, combinatorici.

In questa sezione G denota un gruppo algebrico lineare connesso riduttivo e T un relativo toro massimale. Sia $X = X^*(T)$ il gruppo dei caratteri di T.

Introduciamo subito il concetto di radici.

1.8.1. Sia S un toro e $r : S \to GL(V)$ una rappresentazione razionale di S. Sappiamo da 1.3.5 che V si può scrivere come somma diretta di sottospazi 1-dimensionali, in ciascuno dei quali un elemento $s \in S$ agisce come moltiplicazione per $\chi(s)$, con χ carattere di S. Chiamiamo i caratteri in questione *pesi* di S su V. I sottospazi non nulli associati a questi caratteri

$$V_\chi := \{v \in V \mid r(s)v = \chi(s)v \quad \forall s \in S)\}$$

sono detti *spazi-peso*.

Definizione 1.8.2 (Radici)**.**
Consideriamo l'azione di T sull'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G data dalla rappresentazione aggiunta Ad e indichiamo con R l'insieme dei relativi pesi non nulli. R è un sottoinsieme finito di X e chiameremo i suoi elementi *radici*.

I sottogruppi G_α, che andremo ora a definire, sono particolarmente semplici e verranno analizzati più in dettaglio nella prossima sezione. Allo stesso tempo si riveleranno utili in quanto vedremo che generano l'intero gruppo, quindi permettono di studiare a fondo parti del gruppo prese singolarmente.

1.8.3. Dato $\alpha \in R$, denotiamo con G_α il centralizzatore del sotto-toro $(\mathrm{Ker}(\alpha))^0$ di T, dove con quest'ultima notazione intendiamo la componente connessa di $\mathrm{Ker}(\alpha)$ contenente e.

Definizione 1.8.4 (Rango e Rango Semi-Semplice)**.**
Sia G un gruppo algebrico lineare e T un suo toro massimale. Definiamo il *rango* di G come la dimensione di T e notiamo che non dipende dalla scelta di T in quanto i tori massimali sono tutti coniugati. Definiamo il *rango semi-semplice* di G come il rango di $G/R(G)$.

Lemma 1.8.5.

(i) G_α *è un sottogruppo chiuso, connesso e non risolubile;*

(ii) G_α *è un gruppo riduttivo;*

(iii) $R(G_\alpha) = \mathrm{Ker}(\alpha)$ *e* G_α *ha rango semi-semplice pari ad* 1.

Lemma 1.8.6. *I gruppi* T *e* G_α *al variare di* $\alpha \in R$ *generano* G.

Procediamo a definire il gruppo di Weyl, secondo oggetto fondamentale di questa sezione.

Definizione 1.8.7 (Gruppo di Weyl)**.**
Definiamo il *gruppo di Weyl* di (G, T) come $W = W(G, T) = N_G(T)/Z_G(T)$, cioè come il quoziente fra normalizzatore e centralizzatore di T in G.

Per 1.3.7 W ha ordine finito. L'azione per coniugio di W su T induce un'azione di W su X, in particolare identificando quest'ultimo con un gruppo abeliano libero finitamente generato come in 1.3.6 si ha che W agisce come un gruppo di automorfismi di X. Guardando l'azione sulla base di caratteri descritta in 1.3.4 si evince che tale azione è fedele, quindi possiamo identificare W con il gruppo di automorfismi che induce. Inoltre con una breve verifica si può mostrare che W permuta gli elementi di R.

Il prossimo obbiettivo di questa trattazione sarà rafforzare il legame tra radici e gruppo di Weyl, in particolar modo in vista della sezione sul dato di radici. Inizieremo associando ad ogni radice un elemento del gruppo di Weyl detto riflessione, associazione che non richiediamo essere iniettiva.

Innanzitutto mostriamo qualche risultato aggiuntivo sul gruppo di Weyl. Detto S un sottotoro di T, notiamo che $W(Z_G(S), T)$ è un sottogruppo di $W(G, T)$, infatti

$$\begin{aligned}
W(Z_G(S), T) &= N_{Z_G(S)}(T)/Z_{Z_G(S)}(T) \\
&= (N_G(T) \cap Z_G(S))/(Z_G(T) \cap Z_G(S)) \\
&= (N_G(T) \cap Z_G(S))/Z_G(T) \\
&\subset N_G(T)/Z_G(T) = W(G, T)
\end{aligned}$$

Se S è centrale in G, allora T/S è un toro massimale di G/S, inoltre si può mostrare con un breve conto che $N_{G/S}(T/S) \simeq N_G(T)/S$ e $Z_{G/S}(T/S) \simeq Z_G(T)/S$, da cui $W(G,T) \simeq W(G/S, T/S)$.

Sia $W_\alpha = W(G_\alpha, T)$, sia inoltre $S = (\mathrm{Ker}(\alpha))^0 \subset T$, sottotoro centrale di G_α, allora $W_\alpha \simeq W(G_\alpha/S, T/S)$. Dato che $T/S \simeq \mathbb{G}_m$, si evince che W_α è un sottogruppo degli automorfismi di $\mathbb{G}_m$, i quali sono costituiti solo da $\pm\,\mathrm{Id}$, quindi ha ordine al più 2.

Proposizione 1.8.8. *Supponiamo G sia non risolubile di rango 1, allora W ha ordine 2.*

1.8.9. Per ogni $\alpha \in R$ applichiamo la precedente proposizione a $(G/S, T/S)$ ottenendo che $W_\alpha = W(G/S, T/S)$ ha ordine 2. Scegliamo $n_\alpha \in N_{G_\alpha}(T) \setminus Z_{G_\alpha}(T)$ e sia s_α l'immagine di n_α in $W_\alpha \subset W$, ben definita in quanto è l'unico elemento diverso dall'identità.

s_α è la cosiddetta riflessione associata ad α e n_α è un suo rappresentante in $N_G(T)$.

Procediamo definendo una struttura di spazio vettoriale reale su caratteri e cocaratteri, per poi vederne i legami con le riflessioni appena definite.

1.8.10. Denotiamo con $X^\vee := \mathrm{Hom}(X, \mathbb{Z})$ il duale di X e con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'accoppiamento tra X e $X^\vee$. $X^\vee$ è naturalmente isomorfo al gruppo $X_*(T)$ dei cocaratteri di T. Identifichiamo X e $X^\vee$ con i rispettivi sottogruppi di $V := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X$ e $V^\vee := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X^\vee$ e denotiamo l'accoppiamento indotto fra V e $V^\vee$ sempre con $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1.8.11. Consideriamo una forma bilineare simmetrica definita positiva $(\cdot, \cdot)$ su V che sia invariante per l'azione di W. Per mostrarne l'esistenza, basta prendere una qualsiasi forma bilineare simmetrica definita positiva f su V e porre

$$(x, y) = \sum_{w \in W} f(w.x, w.y) \qquad (x, y \in V)$$

Si può dimostrare che $s_\alpha(x) = x - 2(\alpha, \alpha)^{-1}(x, \alpha)\alpha$ per ogni $\alpha \in R$, $x \in V$. Quest'uguaglianza è vera per ogni forma che rispetta le proprietà precedentemente enunciate.

Presentiamo ora il concetto di coradice:

Lemma 1.8.12.

(i) Per ogni $\alpha \in R$ esiste un unico $\alpha^\vee \in X^\vee$ con $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ tale che per ogni $x \in X$ si ha $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$, cioè che $\langle x, \alpha^\vee \rangle = 2(\alpha, \alpha)^{-1}(x, \alpha)$;

(ii) Se $\alpha, \beta \in R$ e $G_\beta = G_\alpha$ allora $s_\beta = s_\alpha$.

Definizione 1.8.13 (Coradici)**.**
Indichiamo con $R^\vee$ l'insieme contenente i vari $\alpha^\vee$ al variare di $\alpha \in R$. Chiamiamo gli elementi di $R^\vee$ *coradici.*

Enunciamo infine un teorema che suggerisce l'importanza delle riflessioni nella teoria che andremo a sviluppare.

Teorema 1.8.14. *W è generato dalle riflessioni $\{s_\alpha\}_{\alpha \in R}$*

1.9 Gruppi di Rango Semi-Semplice Uno

In questa sezione ci riduciamo a studiare i gruppi di rango semi-semplice uno. Vedremo il caso particolare in cui il gruppo è anche semi-semplice, mentre il caso generale verrà analizzato riconducendosi al precedente. I risultati che mostreremo ci permetteranno di trarre informazioni sui vari G_α definiti nella sezione precedente, quindi sulla struttura dell'intero gruppo.

Iniziamo subito dal caso particolare.

Teorema 1.9.1. *Sia G un gruppo algebrico lineare connesso non-risolubile semi-semplice di rango uno, allora G è isomorfo a $\mathbf{SL}_2$ o a $\mathbf{PSL}_2$.*

La dimostrazione del precedente risultato non risulta affatto banale, soprattutto se confrontata con quelle degli altri teoremi visti fino a questo momento. Si tratta comunque di una dimostrazione elementare, nel senso che non richiede particolari conoscenze teoriche ma solo di svolgere alcuni casi macchinosi e fare un po' di conti.

Una parte della dimostrazione che risulta interessante e che verrà riutilizzata è la seguente:

Lemma 1.9.2. *La proiezione $\pi : \mathbf{SL}_2 \to \mathbf{PSL}_2$ è un morfismo di varietà e un omomorfismo di gruppi.*

Si può costruire esplicitamente il morfismo π e notare che mappa sottogruppi di Borel e rappresentanti del gruppo di Weyl di $\mathbf{SL}_2$ nei corrispettivi di $\mathbf{PSL}_2$.

Torniamo ora a trattare il caso generale: per il resto della sezione, sia G un gruppo algebrico lineare connesso non-risolubile riduttivo di rango semi-semplice uno.

1.9.3. Sia T il toro massimale di G, $\mathfrak{t} = L(T)$ la relativa algebra di Lie e R l'insieme delle radici di G. Riconducendosi al caso semi-semplice, si dimostra che $R = \{\alpha, -\alpha\}$ e che

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

dove i sottospazi $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ hanno dimensione uno.

Notando che il radicale di G è un toro centrale e riconducendosi nuovamente al caso semi-semplice si trova il seguente lemma:

Lemma 1.9.4.

(i) *Esiste un omomorfismo di gruppi algebrici $u_\alpha : \mathbb{G}_a \to G$ tale che $tu_\alpha(x)t^{-1} = u_\alpha(\alpha(t)x)$ $(x \in k, t \in T)$ e $\mathrm{Im}(du_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$. Tale omomorfismo è unico a meno di riscalamento del dominio;*

(ii) *T e $U_\alpha = \mathrm{Im}(u_\alpha)$ generano un sottogruppo di Borel di G la cui algebra di Lie è $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$;*

(iii) I sottogruppi T, $U_\alpha = \mathrm{Im}(u_\alpha)$ e $U_{-\alpha} = \mathrm{Im}(u_\alpha)$ generano G.

Dal precedente discende che gli unici sottogruppi di Borel di G sono TU_α e $TU_{-\alpha}$ con algebre di Lie rispettivamente date da $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

Sappiamo che $G/R(G) \simeq \mathbf{SL}_2$ o $G/R(G) \simeq \mathbf{PSL}_2$, e in entrambi i casi, al più componendo con la mappa $\pi : \mathbf{SL}_2 \to \mathbf{PSL}_2$, troviamo un omomorfismo $\widetilde{\psi} : \mathbf{SL}_2 \to G/R(G)$. Ricordandoci che $R(G)$ è un toro centrale si riesce a sollevare la mappa $\widetilde{\psi}$ a G e ottenere il risultato che segue.

Proposizione 1.9.5.

(i) A meno di rinormalizzare u_α e $u_{-\alpha}$, esiste un omomorfismo $\psi : \mathbf{SL}_2 \to G$ tale che

$$u_\alpha(x) = \psi \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad u_{-\alpha}(x) = \psi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Sia

$$n_\alpha(x) = u_\alpha(x)u_{-\alpha}(-x^{-1})u_\alpha(x) = \psi \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

allora $n_\alpha(x) \in N_G(T)$ e la sua immagine nel gruppo di Weyl è s_α;

(iii) Vale l'uguaglianza $\alpha^\vee(x) = \psi \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$.

Enunciamo un ultimo teorema che utilizzeremo in seguito.

Proposizione 1.9.6. *Sia $f \in k[G]$ una funzione regolare su G la cui restrizione a (G, G) è non costante. Supponiamo che esista un carattere χ di B, quindi anche di T, tale che $f(gb) = \chi(b)f(g)$ per ogni $b \in B, g \in G$, allora $\langle \chi, \alpha^\vee \rangle > 0$.*

Anche la sua dimostrazione si basa sul ricondursi al caso semi-semplice e al caso $\mathbf{SL}_2$ tramite π, per poi verificare esplicitamente la tesi.

Capitolo 2

Sistemi di Radici

2.1 Sistemi di Radici

Gli oggetti di studio di questo capitolo sono i sistemi di radici e i sistemi di radici positive: si tratta di concetti combinatorici che possono essere definiti e analizzati indipendentemente dai gruppi algebrici, ma che poi si riveleranno molto utili nello studio di questi ultimi. Utilizzeremo notazioni già viste, come "gruppo di Weyl", "radici", ..., per enfatizzare legami che espliciteremo successivamente, ma ciò non deve trarre in inganno: gli oggetti che andremo a studiare sono tutti definiti all'interno di questa sezione e non hanno (ancora) relazioni con le precedenti.

Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare definito positivo $(\cdot,\cdot)$. Per ogni $x, y \in V$, $x \neq 0$ poniamo

$$\langle y, x^\vee \rangle = 2\frac{(y,x)}{(x,x)} \qquad \text{e} \qquad s_x(y) = y - \langle y, x^\vee \rangle x$$

Come la notazione suggerisce, possiamo vedere $x^\vee$ come un elemento del duale $V^\vee$ con $x^\vee(y) = \langle y, x^\vee \rangle$.

Definizione 2.1.1 (Sistema di Radici)**.**
Un *Sistema di Radici* è una coppia (V, R) con V spazio vettoriale reale dotato di una forma bilineare simmetrica definita positiva $(\cdot,\cdot)$ e R sottoinsieme di V per la quale:

(RS 1) R è finito e genera V, inoltre $0 \notin R$;

(RS 2) Per ogni $\alpha \in R$ si ha $s_\alpha(R) = R$;

(RS 3) Per ogni $\alpha, \beta \in R$ si ha $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$.

(RS 4) Gli unici multipli di α in R sono $\pm\alpha$, cioè se $c \in \mathbb{R}$ con $c\alpha \in R$, allora $c = \pm 1$.

Chiameremo gli elementi di R *radici*.

Definizione 2.1.2 (Gruppo di Weyl)**.**
Se (V, R) è un sistema di radici, definiamo il suo gruppo di Weyl $W = W(V, R)$ come il gruppo di automorfismi di V generato da s_α per $\alpha \in R$.

Notiamo che il prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ è invariante per l'azione di W, infatti per $\alpha \in R$

$$(s_\alpha(x), s_\alpha(y)) = (x - 2(\alpha,\alpha)^{-1}(x,\alpha)\alpha, y - 2(\alpha,\alpha)^{-1}(y,\alpha)\alpha) = (x,y)$$

Lemma 2.1.3. *W è un gruppo finito.*

Dimostrazione. Gli elementi di W agiscono sulle radici permutandole, in quanto prodotto delle riflessioni s_α che, per ipotesi, permutano le radici. Possiamo definire un omomorfismo da W nel gruppo simmetrico $S_{\#|R|}$, che si verifica essere iniettivo in quanto R genera V. Concludiamo che $\#|W| \leq \#|R|!$, in particolare W è un gruppo finito. □

Definizione 2.1.4 (Sistema di Radici Positive)**.**
Sia (V,R) un sistema di radici con gruppo di Weyl W. Un sottoinsieme R^+ di R è un sistema di radici positive se esiste $x \in V$ con $(\alpha, x) \neq 0$ per ogni $\alpha \in R$ tale che

$$R^+ = \{\alpha \in R \mid (\alpha, x) > 0\}$$

2.1.5. Notiamo che R^+ ha le seguenti proprietà:

(a) R è unione disgiunta di R^+ e $-R^+$;

(b) Date $\alpha, \beta \in R^+$ e $i, j \in \mathbb{N}$ tali che $i\alpha + j\beta \in R$, allora $i\alpha + j\beta \in R^+$.

Per la prima basta notare che, se $\alpha \in R$, allora $-\alpha = s_\alpha(\alpha) \in R$, mentre la seconda è immediata.

2.2 Coppie di Radici

In questa sezione proseguiremo con lo studio dei sistemi di radici, in particolare dimostreremo alcuni teoremi riguardanti l'interazione di due radici.

Sia (V,R) un sistema di radici e sia W il relativo gruppo di Weyl. Per 2.1.3 W è un gruppo finito. Siano α, β radici linearmente indipendenti.

Lemma 2.2.1.

(i) I possibili valori che la coppia $(\langle\alpha,\beta^\vee\rangle, \langle\beta,\alpha^\vee\rangle)$ *può assumere sono* $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(-1,-1)$, $(-1,-2)$, $(-1,-3)$, $(-2,-1)$, $(-3,-1)$*;*

(ii) Per i quattro possibili valori che $\max(|\langle\alpha,\beta^\vee\rangle|, |\langle\beta,\alpha^\vee\rangle|)$ *può assumere, cioè* $0,1,2,3$, *l'ordine di* $s_\alpha s_\beta$ *è rispettivamente* $2,3,4,6$*;*

Dimostrazione. Consideriamo il sottospazio V' di dimensione 2 generato da α e β. Notiamo s_α e s_β stabilizzano V', in particolare l'azione di $s_\alpha s_\beta$ su V' è descritta dalla matrice

$$M_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \langle\alpha,\beta^\vee\rangle\langle\beta,\alpha^\vee\rangle - 1 & \langle\beta,\alpha^\vee\rangle \\ -\langle\alpha,\beta^\vee\rangle & -1 \end{pmatrix}$$

Dato che W è finito, $s_\alpha s_\beta$ ha ordine finito, quindi gli autovalori di $M_{\alpha\beta}$ sono radici dell'unità, coniugate in quanto la matrice ha determinante 1. Da ciò deduciamo anche che la somma degli autovalori, quindi la traccia, è al più 2 in valore assoluto, da cui $|\langle\alpha, \beta^\vee\rangle\langle\beta, \alpha^\vee\rangle - 2| \leq 2$. Gli unici casi in cui si ha l'uguaglianza sono quelli in cui i due autovalori sono uguali, quindi entrambi 1 o -1, cioè quelli in cui $M_{\alpha\beta}$ coincide con Id o con $-\,\mathrm{Id}$. Notiamo che non è possibile ottenere il primo caso.

Se $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle = 0$, dato che la matrice deve avere ordine finito, si trova $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle = 0$. In modo simile se $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle = 0$ si ha che $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle = 0$. Inoltre in questo caso $M_{\alpha\beta} = -\,\mathrm{Id}$, quindi ha ordine 2.

Possiamo supporre nei restanti casi che $|\langle\alpha, \beta^\vee\rangle\langle\beta, \alpha^\vee\rangle - 2| < 2$ A meno di cambiare base sostituendo α con $-\alpha$, mantenendo il sottospazio V' e l'applicazione lineare $M_{\alpha\beta}$ invariati, possiamo assumere che $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle > 0$.

Cerchiamo i possibili valori di $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle$ e $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle$ che soddisfano la precedente disuguaglianza:

(i) se $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle = 1$ allora $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle \in \{1, 2, 3\}$;

(ii) se $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle = 2$ allora $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle = 1$;

(iii) se $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle = 3$ allora $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle = 1$;

(iv) se $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle \geq 4$ non ci sono soluzioni.

Questo dimostra il punto (i).

Per ognuno dei cinque casi elencati si può verificare esplicitamente che la matrice abbia ordine finito. Riassumiamo i vari casi e l'ordine per ognuno di essi:

$(\langle\alpha, \beta^\vee\rangle, \langle\beta, \alpha^\vee\rangle)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(3,1)$
$\mathrm{ord}(M_{\alpha\beta})$	2	3	4	6	4	6

Questo conclude il punto (ii).

□

Lemma 2.2.2. *Siano α, β radici linearmente indipendenti. Se $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle > 0$, allora $\alpha - \beta$ è una radice. Se $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle < 0$, allora $\alpha + \beta$ è una radice.*

Dimostrazione. Notiamo che la seconda affermazione discende dalla prima sostituendo β con la radice $-\beta$, quindi è sufficiente dimostrare la prima. Per 2.2.1 (i), almeno uno fra $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle$ e $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle$ deve essere uguale ad 1. Se $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle = 1$, abbiamo $\alpha - \beta = s_\beta.\alpha \in R$. Se invece $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle = 1$, abbiamo $\beta - \alpha = s_\alpha.\beta \in R$, da cui anche $\alpha - \beta \in R$. □

Consideriamo un sistema di radici positive R^+ in R. Data $\alpha \in R$, scriviamo $\alpha > 0$ se $\alpha \in R^+$ e $\alpha < 0$ se $-\alpha \in R^+$.

Lemma 2.2.3. *Siano $\alpha, \beta \in R$, allora esiste $w \in W$ tale che $w.\alpha > 0$ e $w.\beta > 0$.*

Dimostrazione. In questa dimostrazione verranno utilizzati più volte i risultati del lemma 2.2.1.

Poniamo $a = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$, allora a assume uno fra i valori $0, 1, 2, 3$.

Se $a = 0$ allora $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0$. In questo caso $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, $s_\alpha(\beta) = \beta$, $s_\beta(\alpha) = \alpha$, $s_\beta(\beta) = -\beta$, quindi possiamo cambiare adeguatamente i segni di α e β scegliendo w fra Id, s_α, s_β e $s_\alpha s_\beta$.

Consideriamo ora il caso $a > 0$ e, senza perdita di generalità, possiamo supporre $\alpha < 0$, dato che se $\alpha, \beta > 0$ basterebbe porre $w = \mathrm{Id}$.

Assumiamo che $\beta < 0$.

Se $(\langle \alpha, \beta^\vee \rangle, \langle \beta, \alpha^\vee \rangle) = (-1, -1)$ poniamo $w = s_\alpha s_\beta s_\alpha$ in modo che $w.\alpha = -\beta > 0$, $w.\beta = -\alpha > 0$.

Se $(\langle \alpha, \beta^\vee \rangle, \langle \beta, \alpha^\vee \rangle) = (1, 1)$, ponendo $w = s_\alpha s_\beta$ si ha che $w.\alpha = -\beta > 0$, $w.\beta = \alpha - \beta$, mentre ponendo $w = s_\beta s_\alpha$ si ha che $w.\alpha = -\alpha + \beta$, $w.\beta = -\beta > 0$, quindi possiamo scegliere w in base al segno di $\alpha - \beta$ (che naturalmente è non nullo).

Se $a > 1$ allora $s_\alpha s_\beta$ ha ordine pari. Poniamo $w = (s_\alpha s_\beta)^{\frac{1}{2} \mathrm{ord}(s_\alpha s_\beta)}$, in modo che w abbia ordine 2 e la matrice associata abbia determinante 1, quindi coincide con $-\mathrm{Id}$, da cui $w.\alpha = -\alpha > 0$, $w.\beta = -\beta > 0$.

Consideriamo ora il caso $\beta > 0$.

Se $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle > 0$, ponendo $w = s_\alpha$ troviamo $w.\alpha = -\alpha > 0$, $w.\beta = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha > 0$.

Supponendo $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = -1$, se $\alpha + \beta > 0$, possiamo nuovamente considerare $w = s_\alpha$ in modo che $w.\alpha = -\alpha > 0$, $w.\beta = \beta + \alpha > 0$, mentre se $\alpha + \beta < 0$, ponendo $w = s_\alpha s_\beta$ troviamo $w.\alpha = \beta > 0$, $w.\beta = -(\alpha + \beta) > 0$.

Nei rimanenti casi si ha $a > 1$. Esattamente uno fra $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ e $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ deve essere uguale a -1 e, a meno di sostituire α e β con $-\beta$ e $-\alpha$, lasciando invariate le assunzioni su $\alpha < 0$ e $\beta > 0$, possiamo assumere $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = -1$.

Supponiamo $a = 2$, allora

$$\begin{aligned} &s_\alpha.\alpha = -\alpha && s_\beta.\alpha = \alpha + \beta && s_\alpha s_\beta.\alpha = \alpha + \beta \\ &s_\alpha.\beta = 2\alpha + \beta && s_\beta.\beta = -\beta && s_\alpha s_\beta.\beta = -2\alpha - \beta \end{aligned}$$

Se $2\alpha + \beta > 0$ scegliamo $w = s_\alpha$, altrimenti se $\alpha + \beta < 0$ poniamo $w = s_\beta$ riconducendoci al caso già trattato in cui entrambe le radici sono negative, infine se $2\alpha + \beta < 0$ e $\alpha + \beta > 0$ è sufficiente scegliere $w = s_\alpha s_\beta$.

Supponiamo infine $a = 3$, allora

$$\begin{aligned} &s_\alpha.\alpha = -\alpha && s_\beta.\alpha = \alpha + \beta && s_\alpha s_\beta.\alpha = 2\alpha + \beta \\ &s_\alpha.\beta = 3\alpha + \beta && s_\beta.\beta = -\beta && s_\alpha s_\beta.\beta = -3\alpha - \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &s_\beta s_\alpha.\alpha = -\alpha - \beta && s_\alpha s_\beta s_\alpha.\alpha = -2\alpha - \beta \\ &s_\beta s_\alpha.\beta = 3\alpha + 2\beta && s_\alpha s_\beta s_\alpha.\beta = 3\alpha + 2\beta \end{aligned}$$

Se $3\alpha + \beta > 0$ scegliamo $w = s_\alpha$, altrimenti se $\alpha + \beta < 0$ poniamo $w = s_\beta$ riconducendoci al caso già trattato in cui entrambe le radici sono negative. Se $2\alpha + \beta > 0$ e $3\alpha + \beta < 0$ scegliamo $w = s_\alpha s_\beta$, altrimenti se $\alpha + \beta > 0$ e $3\alpha + 2\beta < 0$ poniamo $w = s_\beta s_\alpha$ riconducendoci nuovamente al caso già trattato in cui entrambe le radici sono negative. L'ultimo possibile caso è quello in cui $2\alpha - \beta < 0$ e $3\alpha + 2\beta > 0$, nel quale è sufficiente scegliere $w = s_\alpha s_\beta s_\alpha$. □

2.3 Sistemi di Radici Positive e Radici Semplici

In questa sezione svilupperemo ulteriormente al teoria sui sistemi di radici. Preso un sistema di radici positive gli assoceremo un suo sottoinsieme costituito dalle cosiddette radici semplici, il quale costituirà una base del nostro sistema di radici. Questo ci permetterà di verificare svariate proprietà riguardanti il gruppo di Weyl, dal fatto che è generato dalle riflessioni rispetto le radici semplici alla transitività dell'azione sui sistemi di radici positive.

Sia R^+ un sistema di radici positive.

Definizione 2.3.1 (Radici Semplici)**.**
Poniamo
$$D = D(R^+) = \{\alpha \in R^+ \mid \alpha \neq \beta + \gamma \quad \forall \beta, \gamma \in R^+\}$$
Gli elementi di D sono detti *radici semplici* di R^+ e le riflessioni s_α per $\alpha \in D$ sono dette *riflessioni semplici* di R^+ e costituiscono l'insieme S.

Proviamo due lemmi che utilizzeremo nelle prossime dimostrazioni.

Lemma 2.3.2. *Siano $\alpha, \beta \in D$ con $\alpha \neq \beta$, allora $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \leq 0$.*

Dimostrazione. Se $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle > 0$, per 2.2.2 $\alpha - \beta$ è una radice, quindi una fra $\alpha - \beta$ e $\beta - \alpha$ è una radice positiva. Nei due casi potremmo scrivere, rispettivamente, α o β come somma di due radici positive, assurdo visto che sono radici semplici. □

Lemma 2.3.3. *Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$ tali che $(v_i, v_j) \leq 0$ per ogni $i \neq j$ e che esista $x \in V$ con $(v_i, x) > 0$ per ogni i. Allora $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Per assurdo, consideriamo una relazione di dipendenza $\sum_{i=1}^n m_i v_i = 0$ a coefficienti reali. Sia $I_1 = \{1 \leq i \leq n \mid m_i > 0\}$. A meno di cambiare segno a tutti i coefficienti, possiamo assumere $I_1 \neq \emptyset$. Riscriviamo la relazione come
$$t = \sum_{i \in I_1} m_i v_i = - \sum_{j \in I \setminus I_1} m_j v_j$$
Notiamo che $(t, t) = - \sum_{i \in I_1, j \in I \setminus J_1} m_i m_j (v_1, v_2) \leq 0$. Segue $t = 0$, da cui $0 = (t, x) = \sum_{i \in I_1} m_i (v_i, x) > 0$, assurdo. □

Il seguente teorema è un risultato fondamentale di questa sezione. Da esso discende subito che D è una "base" delle radici, e dato che queste ultime generano V, il teorema afferma anche che D è una base di V.

Teorema 2.3.4. *Le radici di D sono linearmente indipendenti su V e ogni radice di R^+ è combinazione lineare di elementi di D con coefficienti interi non-negativi.*

Dimostrazione. Sia $x \in V$ con $(\alpha, x) \neq 0$ per ogni $\alpha \in R$ tale che $R^+ = \{\alpha \in R \mid (\alpha, x) > 0\}$.

Iniziamo mostrando che ogni radice di R^+ è combinazione lineare di elementi di D con coefficienti interi non-negativi. Per assurdo, consideriamo una radice positiva $\alpha \in R^+$ non esprimibile in tale forma che minimizza (α, x) (la scelta è possibile in quanto le radici sono in numero finito). $\alpha \notin D$, dunque $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ per qualche $\alpha_1, \alpha_2 \in R^+$. Ma $(\alpha, x) = (\alpha_1, x) + (\alpha_2, x)$ e per minimalità di α possiamo scrivere α_1 e α_2 come combinazione lineare di elementi di D con coefficienti interi non-negativi, dunque possiamo esprimere anche α in questa forma, assurdo.

Mostriamo ora che le radici di D sono linearmente indipendenti. Per 2.3.2 si ha $(\alpha, \beta) \leq 0$ per ogni $\alpha, \beta \in D$, $\alpha \neq \beta$, quindi è sufficiente applicare 2.3.3. □

Proviamo un altro lemma che troverà utilità nelle prossime dimostrazioni.

Lemma 2.3.5. *Se $\alpha \in R^+ \setminus D$, allora esiste $\beta \in D$ tale che $\alpha - \beta \in R^+$.*

Dimostrazione. Sia $x \in V$ con $(\alpha, x) \neq 0$ per ogni $\alpha \in R$ tale che $R^+ = \{\alpha \in R \mid (\alpha, x) > 0\}$. Se $(\alpha, \beta) \leq 0$ per ogni $\beta \in D$, ricordando 2.3.2 potremmo applicare 2.3.3 a $\{\alpha\} \cup D$ ottenendo un insieme di vettori linearmente indipendenti, assurdo in quanto D è già una base di V per il precedente teorema. Sia dunque $\beta \in D$ con $(\alpha, \beta) > 0$ e applicando 2.2.2 troviamo che $\alpha - \beta \in R$. Se per assurdo $\alpha - \beta \in -R^+$, allora $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$, cioè β è somma di due radici positive, assurdo in quanto radice semplice. Possiamo quindi concludere che $\alpha - \beta \in R^+$. □

Il seguente lemma ha una particolare importanza in quanto verrà ampiamente utilizzato in varie dimostrazioni, anche al di fuori di questa sezione.

Lemma 2.3.6. *Sia $\alpha \in D$, allora s_α permuta gli elementi di $R^+ \setminus \{\alpha\}$;*

Dimostrazione. Sia $\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}$ e scriviamo $\beta = \sum_{\gamma \in D} m_\gamma \gamma$ con $m_\gamma \in \mathbb{N}$. β non è multiplo di α, quindi esiste $\delta \neq \alpha$ con $m_\delta > 0$. Dato che $s_\alpha.\beta \in R$, possiamo scrivere $s_\alpha.\beta = \sum_{\gamma \in D} n_\gamma \gamma$ con n_γ tutti non-negativi o non-positivi a seconda che $s_\alpha.\beta$ sia o meno una radice positiva. Ma $s_\alpha.\beta = \beta - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \alpha$, quindi $n_\delta = m_\delta > 0$, il che conclude $s_\alpha.\beta \in R^+$. □

Concludiamo la sezione con altri due risultati fondamentali: le seguenti proposizioni ci descrivono importanti proprietà dell'azione del gruppo di Weyl sulle radici e su insiemi di queste ultime, stabiliscono inoltre che tale gruppo è generato dalle riflessioni semplici.

Proposizione 2.3.7.

(i) Siano R^+, R'^+ sistemi di radici positive in R, allora esiste $w \in W$ tale che $R'^+ = w.R^+$ e $D(R'^+) = w.D(R^+)$;

(ii) Sia $\alpha \in R$, allora esiste $w \in W$ tale che $w.\alpha \in D$;

(iii) W è generato da S, cioè da $\{s_\alpha \mid \alpha \in D\}$;

Dimostrazione. Sia W' il sottogruppo di W generato da $\{s_\alpha \mid \alpha \in D\}$. Dimostriamo i primi due punti per W', poi proviamo che $W' = W$.

(i) Siano $x, y \in V$ con $(\beta, x) \neq 0 \neq (\beta, y)$ per ogni $\beta \in R$ tali che $R^+ = \{\beta \in R \mid (\beta, x) > 0\}$ e $R'^+ = \{\beta \in R \mid (\beta, y) > 0\}$. Sia $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R^+} \alpha$ e scegliamo $w' \in W'$ che massimizzi $(\delta, w'^{-1}.y)$, possibile in quanto $W' < W$ è finito per 2.1.3. Sia $\alpha \in D = D(R^+)$, allora

$$(\delta, w'^{-1}.y) \geq (\delta, s_\alpha w'^{-1}.y) = (s_\alpha.\delta, w'^{-1}.y) = (\delta - \alpha, w'^{-1}.y)$$

dove l'ultimo passaggio è vero per 2.3.6. Troviamo dunque che $(w'.\alpha, y) = (\alpha, w'^{-1}.y) \geq 0$, e non potendo valere l'uguaglianza per ipotesi, si ha $w'.\alpha \in R'^+$. Dovendo valere per ogni $\alpha \in D$, vale anche $w'.D \subset R'^+$ e quindi $w'.R^+ \subset R'^+$. Visto che $\#|w'.R^+| = \#|R^+| = \frac{1}{2}\#|R| = \#|R'^+|$, troviamo che $w'.R^+ = R'^+$. Sia $\alpha \in R^+$, allora

$$\begin{aligned}
\alpha \in D(R^+) &\iff \alpha \neq \beta + \gamma \quad \forall \beta, \gamma \in R^+ \\
&\iff w'.\alpha \neq w'.\beta + w'.\gamma \quad \forall \beta, \gamma \in R^+ \\
&\iff w'.\alpha \neq \beta + \gamma \quad \forall \beta, \gamma \in w'.R^+ = R'^+ \\
&\iff w'.\alpha \in D(R'^+)
\end{aligned}$$

da cui concludiamo $D(R'^+) = w'.D(R^+)$.

(ii) Per il punto (i) è sufficiente mostrare che $\alpha \in D(R'^+)$ per un qualche sistema di radici positive R'^+. Sia $U = V \setminus \bigcup_{\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}} \mathrm{Span}(\beta)^\perp$, che notiamo essere un aperto di V (con la topologia euclidea). Dato che $\alpha \notin \mathrm{Span}(\beta)$ per $\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}$, esiste $y \in \mathrm{Span}(\alpha)^\perp \cap U$. In questo modo $(\alpha, y) = 0$ e $(\beta, y) \neq 0$ per ogni $\beta \in R \setminus \{\pm\alpha\}$. Possiamo considerare un intorno U' di y contenuto in U sufficientemente piccolo e scegliere y' in $U' \setminus \mathrm{Span}(\alpha)^\perp$ in modo che $0 < |(\alpha, y')| < |(\beta, y')|$ per ogni $\beta \in R \setminus \{\pm\alpha\}$. Inoltre, a meno di scambiare y' con $-y'$, assumiamo $(\alpha, y') > 0$. Detto $R'^+ = \{\gamma \in R \mid (\gamma, y') > 0\}$, si vede facilmente che $\alpha \in D(R'^+)$, concludendo anche il secondo punto.

(iii) Dato che W è generato da $\{s_\alpha \mid \alpha \in R\}$, è sufficiente mostrare che $s_\alpha \in W'$ per ogni $\alpha \in R$. Per il punto (ii) esiste $w' \in W'$ con $w'.\alpha \in D$, ma allora

$$\begin{aligned} s_{w'.\alpha}(z) &= z - 2(z,z)^{-1}(z, w'.\alpha)w'.\alpha \\ &= w'.(w'^{-1}.z - 2(w'^{-1}.z, w'^{-1}.z)^{-1}(w'^{-1}.z, \alpha)\alpha) \\ &= w'.s_\alpha(w'^{-1}z) \\ &= (w's_\alpha w'^{-1})(z) \end{aligned}$$

per ogni $z \in V$, cioè $w's_\alpha w'^{-1} = s_{w'.\alpha} \in W'$, da cui anche $s_\alpha \in W'$.

□

Proposizione 2.3.8. *Sia $w \in W$ tale che $w.R^+ = R^+$, allora $w = e$.*

Dimostrazione. Scriviamo w come prodotto del minimo numero possibile di riflessioni semplici, cioè $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_t}$ con $\alpha_i \in D$, e supponiamo per assurdo $t > 0$, dunque $t \geq 2$ in quanto $s_{\alpha_1}.R^+ \neq R^+$. Sia $r_i = s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_{t-1}}.\alpha_t$ e notiamo che $r_{t-1} = \alpha_t \in R^+$, mentre $r_0 = ws_{\alpha_t}.\alpha_t = -w.\alpha_t \in -R^+$. Sia j il più piccolo indice per cui $r_j \in R^+$, allora $s_{\alpha_j}.r_j = s_{\alpha_j}s_{\alpha_{j+1}} \dots s_{\alpha_{t-1}}.\alpha_t = r_{j-1} \in -R^+$. Per 2.3.6 si deve avere $r_j = \alpha_j$, quindi, ricordando che $ws_\alpha w^{-1} = s_{w.\alpha}$ come visto nell'ultimo punto della dimostrazione della precedente proposizione, abbiamo

$$\begin{aligned} s_{\alpha_j} &= s_{r_j} \\ &= s_{s_{\alpha_{j+1}} \dots s_{\alpha_{t-1}}.\alpha_t} \\ &= (s_{\alpha_{j+1}} \dots s_{\alpha_{t-1}})s_{\alpha_t}(s_{\alpha_{j+1}} \dots s_{\alpha_{t-1}})^{-1} \\ &= (s_{\alpha_{j+1}} \dots s_{\alpha_{t-1}})s_{\alpha_t}(s_{\alpha_{t-1}} \dots s_{\alpha_{j+1}}) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} w &= s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_j} \dots s_{\alpha_t} \\ &= s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{j-1}}(s_{\alpha_{j+1}} \dots s_{\alpha_{t-1}})s_{\alpha_t}(s_{\alpha_{t-1}} \dots s_{\alpha_{j+1}})s_{\alpha_{j+1}} \dots s_{\alpha_t} \\ &= s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{j-1}}s_{\alpha_{j+1}} \dots s_{\alpha_{t-1}} \end{aligned}$$

Ma ciò è assurdo per la minimalità di t, dunque $w = e$. □

2.4 Decomposizione Ridotta

In questa sezione assoceremo ad ogni elemento del gruppo di Weyl una successione di riflessioni semplici più corta possibile necessaria per scrivere tale elemento, detta decomposizione ridotta. Vedremo le relazioni di tale successione e della sua lunghezza con alcuni sottoinsiemi di radici e studieremo come l'azione delle riflessioni semplici influenza la decomposizione. Alla fine della sezione mostreremo due proposizioni che forniscono una presentazione del gruppo di Weyl: pur non essendo necessaria ai successivi sviluppi della teoria, rimane un risultato interessante su un oggetto che abbiamo utilizzato e continueremo ad utilizzare per il resto della tesi, nonché costituisce una degna conclusione di questo capitolo.

Introduciamo gli insiemi $R(w)$, che vedremo essere strettamente legati alla decomposizione ridotta di w.

2.4.1. Dato $w \in W$, poniamo

$$R(w) = \{\alpha \in R^+ \mid w.\alpha \in -R^+\}$$

Proposizione 2.4.2. *Per $\alpha \in D$*

$$R(ws_\alpha) = s_\alpha.R(w) \cup \{\alpha\} \qquad \textit{se } w.\alpha \in R^+$$
$$R(ws_\alpha) = s_\alpha.(R(w) \setminus \{\alpha\}) \qquad \textit{se } w.\alpha \in -R^+$$

Dimostrazione. Supponiamo $w.\alpha \in R^+$, allora $ws_\alpha.\alpha = w.(-\alpha) = -w.\alpha \in -R^+$; dato che $\alpha \notin R(w)$, $s_\alpha.R(w) \subset R^+$, inoltre $ws_\alpha.(s_\alpha.R(w)) = w.R(w) \subset -R^+$, da cui $s_\alpha.R(w) \cup \{\alpha\} \subset R(ws_\alpha)$.

Se invece $w.\alpha \in -R^+$, $s_\alpha.(R(w) \setminus \{\alpha\}) \subset R^+ \setminus \{\alpha\} \subset R^+$, inoltre $ws_\alpha.(s_\alpha.(R(w) \setminus \{\alpha\})) = w.(R(w) \setminus \{\alpha\}) \subset -R^+$, da cui $s_\alpha.(R(w) \setminus \{\alpha\}) \subset R(ws_\alpha)$.

Notiamo che $w.\alpha \in R^+$ se e solo se $ws_\alpha.\alpha \in -R^+$, e a meno di sostituire α con $s_\alpha.\alpha = -\alpha$ possiamo assumere che $w.\alpha \in R^+$. Allora

$$R(ws_\alpha) = s_\alpha.s_\alpha.(R(ws_\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cup \{\alpha\} \subset s_\alpha.R(ws_\alpha^2) \cup \{\alpha\} = s_\alpha.R(w) \cup \{\alpha\} \subset R(ws_\alpha)$$

mostrando che entrambi i contenimenti sono uguaglianze vista la bigettività di s_α e il fatto che $\alpha \notin s_\alpha.R(w)$. $\square$

Ricordiamo che W è generato da S per 2.3.7 (iii).

Definizione 2.4.3 (Lunghezza e Decomposizione Ridotta)**.**
Dato $w \in W$, la *lunghezza* $l(w)$ di w (relativamente ad S) è il più piccolo intero $h \geq 0$ tale che w si possa esprimere come prodotto di h elementi di S. Una *decomposizione ridotta* di w è una sequenza $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_h)$ in S con $w = s_1 \dots s_h$ e $h = l(w)$.

Il seguente è il risultato centrale di questa sezione.

Lemma 2.4.4. *Sia $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_h)$ una decomposizione ridotta di $w \in W$ dove $s_i = s_{\alpha_i}$ ($\alpha_i \in D$).*

(i) $R(w) = \{\alpha_h, s_h.\alpha_{h-1}, \dots, s_h \dots s_2.\alpha_1\}$;

(ii) Il numero di elementi di $R(w)$ è $l(w)$;

(iii) *Dato* $\alpha \in D$, $l(ws_\alpha) = l(w) + 1$ *se* $w.\alpha \in R^+$ *e* $l(ws_\alpha) = l(w) - 1$ *se* $w.\alpha \in -R^+$*;* *dato* $\alpha \in D$, $l(s_\alpha w) = l(w) + 1$ *se* $w^{-1}.\alpha \in R^+$ *e* $l(s_\alpha w) = l(w) - 1$ *se* $w^{-1}.\alpha \in -R^+$.

(iv) *Dato* $\alpha \in D$ *tale che* $w.\alpha \in -R^+$*, esiste una decomposizione ridotta di* w *il cui elemento finale è* s_α*;*

(v) *Data una decomposizione ridotta* $\boldsymbol{s}' = (s'_1, \dots, s'_h)$ *di* w*, esiste* i *con* $1 \leq i \leq h$ *tale che* $s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_h = s'_1 \dots s'_{h-1}$.

Dimostrazione.

(i) la tesi è banalmente vera per $h = 0$, mentre per $h = 1$ discende da 2.3.6. Sia $h > 1$ e sia $w' = s_1 \dots s_{h-1}$. Per ipotesi induttiva si ha che $R(w') = \{\alpha_{h-1}, s_{h-1}.\alpha_{h-2}, \dots, s_{h-1} \dots s_w.\alpha_1\}$. Se $w'\alpha_h \in R^+$ allora (i) vale per 2.4.2. Se invece $w'\alpha_h \in -R^+$ avremmo che $\alpha_h \in R(w')$, quindi $\alpha_h = s_{h-1} \dots s_{i+1}.\alpha_i$ per un qualche i. Segue che

$$\begin{aligned} s_h = s_{\alpha_h} = s_{s_{h-1} \dots s_{i+1}.\alpha_i} &= (s_{h-1} \dots s_{i+1}) s_i (s_{h-1} \dots s_{i+1})^{-1} \\ &= s_{h-1} \dots s_{i+1} s_i s_{i+1} \dots s_{h-1} \end{aligned}$$

da cui

$$w = s_1 \dots s_h = s_1 \dots s_{h-1}(s_{h-1} \dots s_{i+1} s_i s_{i+1} \dots s_{h-1}) = s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_{h-1}$$

assurdo per minimalità di h;

(ii) per (i) il numero di elementi di $R(w)$ è uguale alla cardinalità della decomposizione ridotta di w, cioè a $l(w)$;

(iii) la parte su ws_α discende direttamente da (ii) e 2.4.2. Per la seconda parte abbiamo $l(s_\alpha w) = l((s_\alpha w)^{-1}) = l(w^{-1} s_\alpha)$ e $l(w) = l(w^{-1})$, riconducendoci dunque al primo caso;

(iv) per definizione $\alpha \in R(w)$, quindi per (i) esiste i tale che $\alpha = s_h \dots s_{i+1}.\alpha_i$. Segue che

$$\begin{aligned} ws_\alpha = s_1 \dots s_h s_{s_h \dots s_{i+1}.\alpha_i} &= s_1 \dots s_h (s_h \dots s_{i+1}) s_i (s_h \dots s_{i+1})^{-1} \\ &= s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_h \end{aligned}$$

da cui $w = s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_h s_\alpha$ è la decomposizione ridotta cercata;

(v) dato che $l(ws'_h) = l(w) - 1$, $w.\alpha'_h \in -R^+$, quindi procedendo come nella dimostrazione di (iv) troviamo i tale che $s'_1 \dots s'_h = w = s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_h s'_h$. Eliminando s'_h in entrambi i membri si ottiene la tesi.

□

La seguente proposizione è l'ingrediente fondamentale del successivo teorema, dove verrà fornita una presentazione di W.

Dati $s, t \in S$ con $s \neq t$, indichiamo con $m(s,t)$ l'ordine di st in W. Notiamo che $m(s,t) = m(t,s)$ per 2.2.1 (ii).

Proposizione 2.4.5. *Sia μ una mappa da S in un monoide (scriveremo l'operazione moltiplicativamente) con le seguenti proprietà:*

(a) $\mu(s)^2 = 1$ *($s \in S$);*

(b) se $s, t \in S$ con $s \neq t$, allora $(\mu(s)\mu(t))^{m(s,t)} = 1$.

Allora esiste un'unica estensione di μ a tutto W che sia un omomorfismo.

Dimostrazione. Per ogni $w \in W$, presa una decomposizione ridotta $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_h)$, poniamo

$$\mu(w) = \mu(s_1) \dots \mu(s_h)$$

È sufficiente mostrare che $\mu(s_1) \dots \mu(s_h)$ è indipendente dalla scelta della decomposizione ridotta di w per ottenere la tesi. Infatti siano $r, s, t \in W$ tali che $rs = t$ e consideriamo delle decomposizioni ridotte $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_h)$ e $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$ rispettivamente di r e s. Se $l(r) + l(s) = l(t)$, concatenando $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ otteniamo una decomposizione ridotta di t, così da verificare $\mu(r)\mu(s) = \mu(t)$. Se invece $l(r) + l(s) > l(t)$, sia j, con $1 \leq j \leq k$ il primo indice per cui $l(rs_1 \dots s_j) < l(r) + j$. Siano $r' = rs_1 \dots s_{j-1}$ e $s' = s_j \dots s_k$ e consideriamo le loro decomposizioni ridotte $\mathbf{r}' = (r_1, \dots, r_h, s_1, \dots, s_{j-1})$ e $\mathbf{s}' = (s_j, \dots, s_k)$. Allora $\mu(r')\mu(s') = \mu(r)\mu(s)$ e $r's' = t$, quindi a meno di cambiare i fattori possiamo assumere $l(rs_1) < l(r) + 1$.

Utilizzando 2.4.4 (iii), (iv) troviamo una decomposizione ridotta di r il cui ultimo elemento è s_1, decomposizione che possiamo assumere aver scelto come $\mathbf{r}$. Siano $r' = r_1 \dots r_{h-1}$ e $s' = s_2 \dots s_k$ con decomposizioni ridotte $\mathbf{r}' = (r_1, \dots, r_{h-1})$ e $\mathbf{s}' = (s_2, \dots, s_k)$, allora $rs = (r_1 \dots r_{h-1}s_1)(s_1 s_2 \dots s_k) = (r_1 \dots r_{h-1})(s_2 \dots s_k) = r's'$ e $\mu(r)\mu(s) = \mu(r_1) \dots \mu(r_{h-1})\mu(s_1)^2\mu(s_2) \dots \mu(s_k) = \mu(r')\mu(s_1)^2\mu(s') = \mu(r')\mu(s')$. Possiamo quindi sostituire r e s con r' e s', e notando che $l(r') + l(s') < l(r) + l(s)$ riusciamo ad iterare il procedimento arrivando in un numero finito di passaggi al caso $l(r) + l(s) = l(t)$.

Procediamo ora a dimostrare l'indipendenza di $\mu(w)$ dalla decomposizione ridotta scelta. Siano $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_h)$, $\mathbf{s}' = (s'_1, \dots, s'_h)$ due decomposizioni ridotte di w. Si procede per induzione su $h = l(w)$. I casi $h = 0, 1$ sono banali in quanto la decomposizione ridotta è unica, possiamo quindi assumere $h > 1$.

Per 2.4.4 (v) esiste i tale che $s_1 \dots s_{i-1}s_{i+1} \dots s_h = s'_1 \dots s'_{h-1}$, allora $s_1 \dots s_{i-1}s_{i+1} \dots s_h s'_h = s'_1 \dots s'_{h-1}s'_h = s_1 \dots s_h$ da cui $s_{i+1} \dots s_h s'_h = s_i \dots s_h$. Allo stesso modo esiste i' tale che $s'_1 \dots s'_{i'-1}s'_{i'+1} \dots s'_h = s_1 \dots s_{h-1}$, da cui $s_{i'+1} \dots s'_h s_h = s'_i \dots s'_h$.

Se $i > 1$, $s_i \dots s_h$ ha lunghezza $h - i + 1 < h$, perciò per ipotesi induttiva

$$\mu(s_{i+1}) \dots \mu(s_h)\mu(s'_h) = \mu(s_i) \dots \mu(s_h)$$

Dato che $s'_1 \dots s'_{h-1}$ ha lunghezza $h - 1 < h$, utilizzando la precedente uguaglianza e l'ipotesi induttiva si trova

$$\begin{aligned}\mu(\mathbf{s}') &= \mu(s'_1)\dots\mu(s'_{h-1})\mu(s'_h) = \mu(s_1)\dots\mu(s_{i-1})\mu(s_{i+1})\dots\mu(s_h)\mu(s'_h) = \mu(s_1)\dots\mu(s_h)\\ &= \mu(\mathbf{s})\end{aligned}$$

Allo stesso modo se $i' > 1$ si trova che $\mu(\mathbf{s}') = \mu(\mathbf{s})$.

Resta da trattare il caso $i = i' = 1$. Siano $\widehat{\mathbf{s}} = (s_2, \dots, s_h, s'_h)$ e $\widehat{\mathbf{s}}' = (s'_2, \dots, s'_h, s_h)$, allora

$$\widehat{w} = s_2 \dots s_h s'_h = s'_1 \dots s'_{h-1} s'_h = s_1 \dots s_{h-1} s_h = s'_2 \dots s'_h s_h =$$

e, per ipotesi induttiva, come già fatto in precedenza,

$$\begin{aligned}\mu(\mathbf{s}') &= \mu(s'_1)\dots\mu(s'_{h-1})\mu(s'_h) = \mu(s_2)\dots\mu(s_h)\mu(s'_h) = \mu(\widehat{\mathbf{s}})\\ \mu(\mathbf{s}) &= \mu(s_1)\dots\mu(s_{h-1})\mu(s_h) = \mu(s'_2)\dots\mu(s'_h)\mu(s_h) = \mu(\widehat{\mathbf{s}}')\end{aligned}$$

Segue che $\mu(\mathbf{s}) = \mu(\mathbf{s}')$ se e solo se $\mu(\widehat{\mathbf{s}}) = \mu(\widehat{\mathbf{s}}')$.

Se $l(\widehat{w}) < l(w)$ allora $l(\widehat{w}) = l(w) - 2$ e utilizzando 2.4.4 (iii), (iv) troviamo una decomposizione ridotta $\widetilde{\mathbf{s}} = (\widetilde{s}_1, \dots, \widetilde{s}_{h-2}, s'_h)$ di $s_2 \dots s_h$ il cui ultimo elemento è s'_h e una decomposizione ridotta $\widetilde{\mathbf{s}}' = (\widetilde{s_1}', \dots, \widetilde{s}'_{h-2}, s_h)$ di $s'_2 \dots s'_h$ il cui ultimo elemento è s_h. Allora

$$\begin{aligned}\mu(\widehat{\mathbf{s}}) &= \mu(\widetilde{\mathbf{s}})\mu(s'_h) = \mu(\widetilde{s}_1, \dots, \widetilde{s}_{h-2})\mu(s'_h)^2 = \mu(\widetilde{s}_1, \dots, \widetilde{s}_{h-2})\\ \mu(\widehat{\mathbf{s}}') &= \mu(\widetilde{\mathbf{s}}')\mu(s_h) = \mu(\widetilde{s}'_1, \dots, \widetilde{s}'_{h-2})\mu(s_h)^2 = \mu(\widetilde{s}'_1, \dots, \widetilde{s}'_{h-2})\end{aligned}$$

quindi $\mu(\widehat{\mathbf{s}}) = \mu(\widehat{\mathbf{s}}')$ se e solo se $\mu(\widetilde{s}_1, \dots, \widetilde{s}_{h-2}) = \mu(\widetilde{s}'_1, \dots, \widetilde{s}'_{h-2})$, vero per ipotesi induttiva.

Se invece $l(\widehat{w}) = l(w)$, possiamo ricondurci al caso $\mathbf{s} = (\dots, s, t)$ e $\mathbf{s}' = (\dots, t, s)$ con $s = s_h$ e $t = s'_h$. Iterando il ragionamento ci riconduciamo a dimostrare il caso $\mathbf{s} = (\dots, t, s, t)$ e $\mathbf{s}' = (\dots, s, t, s)$ fino poi ad arrivare a decomposizioni ridotte composte alternatamente solo da s e t di lunghezza d. Possiamo riscrivere $\underbrace{sts\dots}_{d \text{ fattori}} = \underbrace{tst\dots}_{d \text{ fattori}}$ come $(st)^d = 1$ e la tesi $\mu(s)\mu(t)\dots = \mu(t)\mu(s)\dots$ equivale a $(\mu(s)\mu(t))^d = 1$. Ma $m(s,t) \mid d$ per definizione, quindi per ipotesi $(\mu(s)\mu(t))^d = ((\mu(s)\mu(t))^{m(s,t)})^{\frac{d}{m(s,t)}} = 1$.

$\square$

Concludiamo il capitolo caratterizzando completamente W.

Teorema 2.4.6. *L'insieme dei generatori S e le relazioni $s^2 = 1$, $(st)^{m(s,t)} = 1$ ($s, t \in S$, $s \neq t$) costituiscono una presentazione di W.*

Dimostrazione. Sia $\widetilde{W}$ il gruppo definito dai generatori $\widetilde{s}$ ($s \in S$) e dalle relazioni $\widetilde{s}^2 = 1$, $(\widetilde{s}\widetilde{t})^{m(s,t)} = 1$ ($s, t \in S$, $s \neq t$). Dato che W rispetta le relazioni che definiscono $\widetilde{W}$, esiste un omomorfismo $\pi : \widetilde{W} \to W$ con $\pi(\widetilde{s}) = s$, inoltre grazie a 2.4.5 abbiamo un omomorfismo $\mu : W \to \widetilde{W}$ con $\mu(s) = \widetilde{s}$. Notiamo che $\pi \circ \mu$ e $\mu \circ \pi$ sono l'identità sui generatori S e

$\{\widetilde{s} \mid s \in S\}$, quindi sono le mappe identità sugli interi gruppi, da cui concludiamo che π è un isomorfismo. $\square$

Capitolo 3

Dato di Radici

3.1 Dato di Radici

L'obiettivo di questo capitolo è associare un sistema di radici ad un dato gruppo algebrico lineare, così da poter sfruttare la teoria sviluppata sui sistemi di radici nello studio del gruppo. Per raggiungere questo scopo introdurremo il dato di radici, un oggetto che si collega naturalmente ad entrambi. In questa sezione vedremo il dato di radici come concetto combinatorico, definito e studiato senza riferimenti ai gruppi algebrici, e costruiremo un sistema di radici ad esso associato. Anche qui utilizzeremo notazioni note, come "radici", "coradici", "accoppiamento", ..., sempre per enfatizzare legami che espliciteremo successivamente, in parte in questa sezione e in parte nella prossima.

Introduciamo subito la nozione di dato di radici:

Definizione 3.1.1 (Dato di Radici)**.**
Un *dato di radici* è una quadrupla $\Psi = (X, R, X^\vee, R^\vee)$ in cui:

(a) X e $X^\vee$ sono gruppi abeliani liberi di rango finito ed è dato un accoppiamento $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X^\vee \to \mathbb{Z}$;

(b) R e $R^\vee$ sono sottoinsiemi finiti di X e $X^\vee$ ed è data una bigezione $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ da R in $R^\vee$.

Dato $\alpha \in R$, definiamo gli endomorfismi s_α e $s_\alpha^\vee$ di X e $X^\vee$ ponendo

$$s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha \qquad s_\alpha^\vee(y) = y - \langle \alpha, y \rangle \alpha^\vee$$

Imponiamo altre due condizioni al dato di radici:

(DR 1) $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ per ogni $\alpha \in R$

(DR 2) $s_\alpha(R) = R$ e $s_\alpha^\vee(R^\vee) = R^\vee$ per ogni $\alpha \in R$

Sotto alcune semplici condizioni, che vedremo soddisfatte dai dati di radici associati ai gruppi oggetto di studio, possiamo definire un sistema di radici associato a un dato di radici.

3.1.2. Se $\Psi = (X, R, X^\vee, R^\vee)$ è un dato di radici, poniamo $V = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \langle R \rangle$, dove $\langle R \rangle$ è il sottogruppo di X generato da R. Notiamo che $\langle R \rangle$ è un gruppo abeliano libero finitamente generato in quanto sottogruppo di X, quindi la mappa $x \mapsto 1 \otimes_{\mathbb{Z}} x$ è iniettiva e possiamo identificare $\alpha \in R$ con $1 \otimes_{\mathbb{Z}} \alpha$. Supponiamo che per ogni $\alpha, \beta \in R$ con $\alpha \neq \pm\beta$ non esista $p \in \mathbb{Q}$ con $\alpha = p\beta$, allora α e β sono linearmente indipendenti su V per le proprietà del prodotto tensore. Supponiamo inoltre esista un prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$ definito positivo su V tale che per ogni $\alpha \in R$, $x \in \langle R \rangle$ si abbia $\langle x, \alpha^\vee \rangle = 2(\alpha, \alpha)^{-1}(x, \alpha)$. Se queste due condizioni sono soddisfatte è immediato verificare che (V, R) è un sistema di radici, che chiameremo sistema di radici associato a Ψ.

Si noti come le notazioni sono coerenti, cioè l'accoppiamento $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e gli elementi $\alpha^\vee$ di $X^\vee$ corrispondono a quelli definiti nel capitolo precedente, a meno di considerare il funtore $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot$.

D'ora in poi sia (V, R) un sistema di radici associato a Ψ. Diamo una definizione alternativa di sistema di radici positive:

3.1.3. R^+ è un sistema di radici positive se esiste $\lambda \in X^\vee$ con $\langle \alpha, \lambda \rangle \neq 0$ per ogni $\alpha \in R$ tale che

$$R^+ = \{\alpha \in R \mid \langle \alpha, \lambda \rangle > 0\}$$

Lemma 3.1.4. *La definizione originale di sistema di radici positive, che ricordiamo essere un sottoinsieme R^+ di R per il quale esiste $x \in V$ con $(\alpha, x) \neq 0$ per ogni $\alpha \in R$ tale che $R^+ = \{\alpha \in R \mid (\alpha, x) > 0\}$, e quella alternativa appena fornita sono effettivamente equivalenti.*

Dimostrazione. Preso $x \in V$ come nella definizione originale, consideriamo la proiezione ortogonale x' di x su $\langle R \rangle$, in modo che $(\alpha, x) = (\alpha, x')$ per ogni $\alpha \in R$. Scriviamo $x' = \sum_{\beta \in R} c_\beta \beta$ con p_β, allora

$$(\alpha, x') = \sum_{\beta \in R} c_\beta (\alpha, \beta) = \sum_{\beta \in R} \frac{1}{2} c_\beta (\beta, \beta) \langle \alpha, \beta^\vee \rangle$$

Approssimando sufficientemente $\frac{1}{2} c_\beta (\beta, \beta)$ come $\frac{p_\beta}{q_\beta}$ con $p_\beta, q_\beta \in \mathbb{Z}$ abbiamo che $\sum_{\beta \in R} \frac{p_\beta}{q_\beta} \langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ è nullo per nessun $\alpha \in R$ e positivo per tutti e soli gli $\alpha \in R^+$. Detto $q = \prod_{\beta \in R} q_\beta$, chiamiamo $\lambda = \sum_{\beta \in R} p_\beta \frac{q}{q_\beta} \beta^\vee$, allora $\lambda \in X^\vee$, $\langle \alpha, \lambda \rangle \neq 0$ per ogni $\alpha \in R$ e $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$ se e solo se $\alpha \in R^+$.

Viceversa, sia $\lambda \in X^\vee$ come nella definizione alternativa. Tramite l'accoppiamento possiamo vedere λ come un elemento di $\mathrm{Hom}(\langle R \rangle, \mathbb{Z})$, dunque $\mathrm{Id} \otimes_{\mathbb{Z}} \lambda$, che identifichiamo con λ, è un elemento di $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}) = V^\vee$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste $x \in V$ con $\langle \alpha, \lambda \rangle = (\alpha, x)$ che dunque soddisfa tutte le proprietà richieste. $\square$

Definiamo infine un ordinamento parziale su X che utilizzeremo soprattutto nell'ultimo capitolo:

3.1.5. Un sistema di radici positive R^+ induce un ordinamento parziale su X: dati $x, y \in X$, diciamo che $x \geq y$ se esistono $n_\alpha \in \mathbb{N}$ al variare di $\alpha \in R^+$ tali che

$$x = y + \sum_{\alpha \in D} n_\alpha \alpha$$

Per 2.3.5 e dato che le radici sono in numero finito, l'insieme D è l'insieme degli elementi minimali di R^+ secondo il precedente ordinamento.

3.2 Dato di Radici di un Gruppo Algebrico

In questa sezione mostreremo come caratteri, radici, cocaratteri e coradici di un gruppo algebrico lineare formino un dato di radici e inducano un sistema di radici. Vedremo anche lo stretto legame fra sistemi di radici positive e sottogruppi di Borel.

Sia G un gruppo algebrico lineare connesso riduttivo e sia T un suo toro massimale. Indichiamo con X il gruppo dei caratteri $X^*(T)$ e con $X^\vee$ il gruppo dei cocaratteri $X_*(T)$. Siano R e $R^\vee$ gli insiemi delle radici e delle coradici di G, definiti rispettivamente in 1.8.2 e in 1.8.13. Ricordiamo inoltre la definizione di V e $V^\vee$ data in 1.8.10.

Verifichiamo che le radici sono in bigezione con le coradici.

Lemma 3.2.1. *La mappa da R in $R^\vee$ data da $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ è una bigezione.*

Dimostrazione. Per definizione di $R^\vee$ basta verificare l'iniettività. Se per assurdo $\alpha, \beta \in R$ e $\alpha^\vee = \beta^\vee$, allora

$$s_\alpha s_\beta(x) = x + \langle x, \alpha^\vee \rangle (\alpha - \beta) \qquad (x \in X)$$

Se x è un autovettore di questa mappa, allora $\langle x, \alpha^\vee \rangle (\alpha - \beta) \in \mathrm{Span}(\{x\})$, quindi $\langle x, \alpha^\vee \rangle = 0$ o $(\alpha - \beta) \in \mathrm{Span}(\{x\})$, e visto che $\langle \alpha - \beta, \alpha^\vee \rangle = \langle \alpha, \alpha^\vee \rangle - \langle \beta, \beta^\vee \rangle = 0$, anche in tal caso $\langle x, \alpha^\vee \rangle = 0$. Segue che 1 è l'unico autovalore dell'endomorfismo considerato (nel caso di autovettori non reali, è sufficiente estendere l'accoppiamento a $\mathbb{C}$ nello stesso modo in cui è stato esteso ad $\mathbb{R}$). Dato che il gruppo di Weyl è finito, la mappa in questione ha ordine finito, quindi è diagonalizzabile e perciò $s_\alpha s_\beta = e$, da cui concludiamo $\alpha - \beta = \frac{1}{2}\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle (\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(s_\alpha s_\beta(\alpha) - \alpha) = 0$. □

I seguenti risultati sono di fondamentale importanza in quanto permettono di collegare gruppi algebrici lineari e sistemi di radici.

Proposizione 3.2.2. *La quadrupla $\Psi = (X, R, X^\vee, R^\vee)$ è un dato di radici.*

Dimostrazione. Ψ soddisfa le condizioni (a) e (b) di 3.1.1 ed anche (DR 1) per 1.8.12 (i). Per concludere non ci resta che mostrare che soddisfa anche (DR 2): per la prima parte, data $\alpha \in R$, si ha che $s_\alpha \in W$ per definizione, gruppo che ricordiamo permutare gli elementi di R, quindi $s_\alpha(R) = R$.

Mostriamo che $s_\alpha^\vee(R^\vee) = R^\vee$. Date $\alpha, \gamma \in R$, per quanto detto si avrà $s_\alpha(\gamma) = \gamma - \langle \gamma, \alpha^\vee \rangle \alpha = \delta \in R$. Detta $\xi = s_\alpha^\vee(\gamma^\vee) = \gamma^\vee - \langle \alpha, \gamma^\vee \rangle \alpha^\vee$, se mostriamo che $\xi = \delta^\vee$ possiamo concludere che $s_\alpha^\vee(R^\vee) = R^\vee$. Per 1.8.12 (i) $\xi = \delta^\vee$ se e solo se $\langle \delta, \xi \rangle = 2$ e $\langle x, \xi \rangle = 2(x,x)^{-1}(x,\delta)$. La prima uguaglianza segue da

$$\begin{aligned}
\langle \delta, \xi \rangle &= \langle \gamma - \langle \gamma, \alpha^\vee \rangle \alpha, \gamma^\vee - \langle \alpha, \gamma^\vee \rangle \alpha^\vee \rangle \\
&= \langle \gamma, \gamma^\vee \rangle + \langle \gamma, \alpha^\vee \rangle \langle \alpha, \gamma^\vee \rangle \langle \alpha, \alpha^\vee \rangle - \langle \alpha, \gamma^\vee \rangle \langle \gamma, \alpha^\vee \rangle - \langle \gamma, \alpha^\vee \rangle \langle \alpha, \gamma^\vee \rangle \\
&= 2 + (2 - 1 - 1)\langle \gamma, \alpha^\vee \rangle \langle \alpha, \gamma^\vee \rangle \\
&= 2
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la seconda, si ha

$$\begin{aligned}
\langle x, \xi \rangle &= \langle x, \gamma^\vee \rangle - \langle \alpha, \gamma^\vee \rangle \langle x, \alpha^\vee \rangle \\
&= 2(x,x)^{-1}(x,\gamma) - 2\langle \alpha, \gamma^\vee \rangle (x,x)^{-1}(x,\alpha) \\
&= 2(x,x)^{-1}(x, \gamma - \langle \alpha, \gamma^\vee \rangle \alpha) \\
&= 2(x,x)^{-1}(x,\delta)
\end{aligned}$$

□

Vediamo che (V, R) è un sistema di radici associato a Ψ: la condizione sul prodotto scalare abbiamo visto essere soddisfatta, mentre il seguente lemma fornisce le condizioni rimanenti.

Lemma 3.2.3. *Se $\alpha \in R$, $c \in \mathbb{Q}$ e $c\alpha \in R$, allora $c = \pm 1$.*

Dimostrazione. Sappiamo che $G_\alpha = G_{c\alpha}$, ma per 1.9.3 le radici di G_α sono $\pm\alpha$, da cui $c = \pm 1$. □

Nel successivo paragrafo utilizzeremo un sottogruppo di Borel per scegliere un sottoinsieme delle radici. La successiva proposizione ci mostra come il sottogruppo scelto sia un sistema di radici positive, concludendo il collegamento fra gruppi algebrici lineari e sistemi di radici.

3.2.4. Sia B un sottogruppo di Borel di G contenente T e sia $\alpha \in R = R(G,T)$. Applicando 1.7.7 (ii) a $G_\alpha = Z_G(\mathrm{Ker}(\alpha)^0)$ si trova che $B' = G_\alpha \cap B$ è un sottogruppo di Borel di G_α. Sia $T' = G_\alpha \cap T$ il toro massimale di G_α, avente $\pm\alpha$ come radici per 1.9.3. Vediamo da 1.9.4 (ii) che $L(B')$ è somma diretta di $L(T')$ e uno spazio-peso 1-dimensionale, corrispondente a una delle due radici. In questo modo si può scegliere una radice da ogni coppia $\pm\alpha$; sia $R^+(B)$ l'insieme di radici ottenuto lasciando variare α in R.

Proposizione 3.2.5. *$R^+(B)$ è un sistema di radici positive.*

Dimostrazione. Per 1.6.4 possiamo considerare una rappresentazione $\phi : G \to GL(A)$ e un vettore non nullo $a \in A$ tali che B sia lo stabilizzatore della linea ka. In questo modo esiste un carattere χ di B, quindi anche di T, tale che $\phi(b)(a) = \chi(b)a$. Sia $\alpha \in R^+(B)$ e scegliamo $t \in T \cap G_\alpha, x \in \mathbb{G}_a$ tali che $tu_{-\alpha}(x)t^{-1}u_{-\alpha}(x)^{-1} = u_{-\alpha}(((-\alpha)(t) - 1)x) \notin B$, dunque $tu_{-\alpha}(x)t^{-1}u_{-\alpha}(x)^{-1} \notin \mathrm{Stab}(a)$.

Consideriamo una funzione lineare l su A tale che $l(a) \neq l(\phi(tu_{-\alpha}(x)t^{-1}u_{-\alpha}(x)^{-1})(a))$ e poniamo $F(g) = l(\phi(g)(a))$ $(g \in G)$, allora si ha $F(gb) = \chi(b)F(g)$ $(b \in B, g \in G)$. Notiamo che la restrizione di F a (G_α, G_α) è non costante in quanto

$$F(tu_{-\alpha}(x)t^{-1}u_{-\alpha}(x)^{-1}) = l(\phi(tu_{-\alpha}(x)t^{-1}u_{-\alpha}(x)^{-1})(a)) \neq l(a) = F(e)$$

quindi per 1.9.6 $\langle \chi, \alpha^\vee \rangle > 0$. Allora, ricordando 1.8.12 (i), $(\alpha, \chi) = (\chi, \alpha) = \frac{1}{2}(\alpha, \alpha)\langle \chi, \alpha^\vee \rangle > 0$. Dovendo quest'ultima disuguaglianza valere per ogni $\alpha \in R^+(B)$, abbiamo che $R^+(B)$ è un sistema di radici positive di R. $\square$

Capitolo 4

Decomposizione di Bruhat

4.1 Sottogruppi Associati ad Una Radice

In questa sezione assoceremo ad ogni radice di un gruppo algebrico lineare un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{G}_a$ sul quale T agisce moltiplicativamente attraverso la radice. Studieremo poi come questi sottogruppi interagiscono fra loro e in che modo sono utili per descrivere la struttura dei sottogruppi di Borel e dell'intero gruppo. Utilizzeremo frequentemente risultati provenienti dai sistemi di radici nelle dimostrazioni.

Sia G un gruppo algebrico lineare connesso riduttivo e sia T un suo toro massimale. Sia inoltre $(X, R, X^\vee, R^\vee)$ il dato di radici di (G, T).

Proposizione 4.1.1.

(i) Per ogni $\alpha \in R$ esiste un isomorfismo u_α di $\mathbb{G}_a$ su un sottogruppo chiuso U_α di G tale che $tu_\alpha(x)t^{-1} = u_\alpha(\alpha(t)x)$ $(t \in T, x \in k)$, unico a meno di riscalamento del dominio. Inoltre $\mathrm{Im}(du_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$ dove quest'ultimo è lo spazio-peso per il peso α di T;

(ii) T e gli U_α per $\alpha \in R$ generano G.

Dimostrazione. Il gruppo G_α è riduttivo e ha rango semi-semplice uno per 1.8.5. Per 1.9.4 (i) esiste u_α con le proprietà richieste. L'unicità di U_α segue dal fatto che ogni possibile gruppo con le proprietà richieste è contenuto in G_α per definizione di quest'ultimo e all'interno di G_α si ha l'unicità di U_α sempre per 1.9.4 (i).

Da 1.8.6 sappiamo che G è generato dai gruppi G_α per $\alpha \in R$ e da 1.9.4 (iii) che G_α è generato da T, U_α e $U_{-\alpha}$, concludendo la dimostrazione del secondo punto. □

Corollario 4.1.2. *Per ogni radice $\alpha \in R$ lo spazio-peso $\mathfrak{g}_\alpha$ ha dimensione uno.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla precedente proposizione notando che $\mathfrak{g}_\alpha$ è isomorfo a k tramite du_α. □

Analizziamo ora le relazioni fra gli U_α e i sottogruppi di Borel.

Corollario 4.1.3. *Sia B un sottogruppo di Borel di G contenente T e sia $\alpha \in R$.*

(i) Le seguenti proprietà sono equivalenti: (a) $\alpha \in R^+(B)$*; (b)* $U_\alpha \subset B$*; (c)* $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{b}$*;*

(ii) $\dim(B) = \dim(T) + \frac{1}{2}\#|R|$ *e* $\dim(G) = \dim(T) + \#|R|$*;*

Dimostrazione. Fissata $\alpha \in R$, per definizione di $R^+(B)$ si ha che $\alpha \in R^+(B)$ se e solo se $\alpha \in R^+(B \cap G_\alpha)$, inoltre $U_\alpha \subset G_\alpha$ e $g_\alpha \subset L(G_\alpha)$ per la precedente dimostrazione. Ci siamo ricondotti al caso di un gruppo connesso riduttivo di rango semi-semplice uno, caso nel quale sappiamo verificare il primo punto grazie a 1.9.4 (i).

Per quanto riguarda il secondo punto, sempre tramite G_α possiamo ricondurci a 1.9.3 e a 1.9.4 (ii) e trovare $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+(B)} \mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$. Ricordando che $\dim(B) = \dim(\mathfrak{b})$, che $\dim(G) = \dim(\mathfrak{g})$ e utilizzando il precedente corollario si ottiene la tesi. □

Il seguente lemma tornerà utile molto spesso.

Lemma 4.1.4. *Sia* w *un elemento del gruppo di Weyl di* (G, T)*, rappresentato da* $\dot{w} \in N_G(T)$*. Data* $\alpha \in R$*, esiste* $c_{w,\alpha} \in k^*$ *tale che* $\dot{w}u_\alpha(x)\dot{w}^{-1} = u_{w.\alpha}(c_{w,\alpha}x)$ $(x \in k)$*.*

Dimostrazione. Per $t \in T, x \in k$ abbiamo che

$$\begin{aligned} t(\dot{w}u_\alpha(x)\dot{w}^{-1})t^{-1} &= \dot{w}((\dot{w}^{-1}t\dot{w})u_\alpha(x)(\dot{w}^{-1}t\dot{w})^{-1})\dot{w}^{-1} \\ &= \dot{w}u_\alpha(\alpha(\dot{w}^{-1}t\dot{w})x)\dot{w}^{-1} \\ &= \dot{w}u_\alpha((w.\alpha)(t)x)\dot{w}^{-1} \end{aligned}$$

Grazie a 4.1.1 (i) concludiamo che $\dot{w}u_\alpha(x)\dot{w}^{-1} = u_{w.\alpha}(c_{w,\alpha}x)$ per qualche $c_{w,\alpha} \in k^*$. □

Il lemma successivo verrà subito utilizzato per dimostrare un importante teorema sulla struttura dei sottogruppi di Borel.

Lemma 4.1.5. *Sia* H *un gruppo algebrico lineare connesso e risolubile, siano* H_u *il suo radicale unipotente e* S *un suo toro massimale. Si assuma che esistano isomorfismi* v_i $(1 \leq i \leq n)$ *da* $\mathbb{G}_a$ *su sottogruppi chiusi di* H *tali che*

(a) esistono caratteri β_i *di* S *non banali, a coppie linearmente indipendenti, con* $sv_i(x)s^{-1} = v_i(\beta_i(s)x)$ $(s \in S,\ x \in k,\ 1 \leq i \leq n)$*;*

(b) gli spazi-peso $\mathfrak{h}_{\beta_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ *hanno dimensione* 1 *e il loro* Span *è* $L(H_u)$*.*

Allora il morfismo $\psi : \mathbb{G}_a^n \to H_u$ *dato da* $\psi(x_1, \ldots, x_n) = v_1(x_1) \ldots v_n(x_n)$ *è un isomorfismo di varietà.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n.

Se $n = 1$ si ha

$$\dim(H_u) = \dim(L(H_u)) = \dim(\mathfrak{h}_{\beta_1}) = 1 = \dim(\mathbb{G}_a) = \dim(\mathrm{Im}(v_1))$$

da cui $\mathrm{Im}(v_1) = H_u$, quindi ψ è un isomorfismo.

Assumiamo $n > 1$ e consideriamo, come in 1.7.3, un sottogruppo normale chiuso N di H isomorfo a $\mathbb{G}_a$ contenuto nel centro di H_u. Allora $L(N)$ è un sottospazio di $L(H_u)$ stabile per l'azione di S e di dimensione $\dim(N) = \dim(\mathbb{G}_a) = 1$. Considerando l'azione di S su $L(N)$ e il fatto che i caratteri sono tutti distinti deduciamo che $L(N)$ deve coincidere con un qualche spazio-peso $\mathfrak{h}_{\beta_j}$. Ma allora $L(N) = L(\mathrm{Im}(v_j))$, da cui $N = \mathrm{Im}(v_j)$ per 1.4.7.

Consideriamo il gruppo quoziente H/N, come definito in 1.6.7, e per $i \neq j$ sia $w_i : \mathbb{G}_a \to H/N$ l'omomorfismo indotto da v_i. Mostriamo che le ipotesi del teorema valgono anche per H/N con i morfismi w_i, in modo da poter applicare l'ipotesi induttiva.

Per 1.7.6 $H \simeq S \times H_u$, quindi $H/N \simeq S \times (H_u/N)$ e di conseguenza S è un toro massimale di H/N e $(H/N)_u = H_u/N$. Si vede immediatamente che $sw_i(x)s^{-1} = w_i(\beta_i(s)x)$ per $s \in S$, $x \in k$, $i \neq j$, mentre l'indipendenza lineare e la non-banalità dei caratteri β_i $(i \neq j)$ è vera per ipotesi. Inoltre per 1.6.8 $L((H/N)_u) = L(H_u/N) = L(H_u)/L(N)$, di conseguenza gli spazi-peso $\mathfrak{h}_{\beta_i}$ $(i \neq j)$ hanno dimensione 1 e il loro Span è $L((H/N)_u)$.

La preimmagine di $\mathrm{Im}(w_i)$ in H è $\mathrm{Im}(v_i)N$, sottogruppo chiuso in quanto prodotto di sottogruppi chiusi per 1.1.6, quindi $\mathrm{Im}(w_i)$ è chiuso in H/N. Non resta che mostrare che i w_i sono isomorfismi.

Dato che $\mathrm{Im}(v_i)$ e $\mathrm{Im}(v_j)$ sono sottogruppi distinti, chiusi e connessi di dimensione 1, in quanto isomorfi a $\mathbb{G}_a$, la loro intersezione è un sottogruppo di dimensione minore di 1, quindi è finito. Ma l'unico sottogruppo finito di $\mathbb{G}_a$ è $\{e\}$, quindi l'intersezione di $\mathrm{Im}(v_i)$ e $\mathrm{Im}(v_j)$ è banale. Da ciò segue che w_i è una bigezione su $\mathrm{Im}(w_i)$, quindi per 1.5.4 w_i è un isomorfismo.

Possiamo ora applicare l'ipotesi induttiva e assumere il lemma per H/N.

Sapendo che la mappa $\widetilde{\psi}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+i}, \ldots x_n) = w_1(x_1) \ldots w_n(x_n)$ è una bigezione $\mathbb{G}_a^{n-1} \to (H/N)_u \simeq H_u/N$ e dalla centralità di N in H_u, si evince che $\psi(x_1, \ldots, x_n) = v(x_1) \ldots v(x_n) = (v(x_1) \ldots v(x_{j-1}) v(x_{j+1}) v(x_n)) v(x_j)$ è una bigezione $\mathbb{G}_a^n \to H_u$.

$\mathbb{G}_a^n$ è irriducibile in quanto prodotto di irriducibili mentre H_u è connesso per definizione di radicale unipotente, quindi irriducibile per 1.1.4 (ii). Inoltre H_u è una varietà normale per 1.5.2, quindi è sufficiente applicare 1.5.3 per concludere che ψ è un isomorfismo.

□

Sia B un sottogruppo di Borel di G contenente il toro massimale T. Indichiamo con $U = B_u$ il radicale unipotente di B e con R^+ il sistema di radici positive definito da B.

Corollario 4.1.6. *Siano $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ le radici di R^+. Il morfismo $\phi : G_a^m \to U$ dato da $\phi(x_1, \ldots, x_m) = u_{\alpha_1}(x_1) \ldots u_{\alpha_m}(x_m)$ è un isomorfismo di varietà. In particolare, U è generato dai gruppi U_α con $\alpha \in R^+$.*

Dimostrazione. Verifichiamo le ipotesi del precedente lemma per $B \supset T$: la proposizione 4.1.1 mostra l'esistenza degli isomorfismi e dei caratteri e 3.2.3 la loro indipendenza a due a due, mentre 4.1.2 ci garantisce la monodimensionalità degli spazi-peso e 1.9.4 (ii) che il loro span sia $L(U)$. □

Consideriamo un insieme di rappresentanti $(\dot{w})_{w \in W}$ degli elementi di W in $N_G(T)$.

Proposizione 4.1.7. *Sia R'^+ un sistema di radici positive in R, allora T e gli U_α con $\alpha \in R'^+$ generano un sottogruppo di Borel B' di G. Il prodotto $T \times \prod_{\alpha \in R'^+} U_\alpha \to B'$ è un isomorfismo di varietà.*

Dimostrazione. Per 2.3.7 (i) esiste $w \in W$ con $R'^+ = w.R^+$. Per 4.1.6 e 1.7.6 sappiamo che T e U_α per $\alpha \in R^+$ generano B e che il prodotto $T \times \prod_{\alpha \in R^+} U_\alpha \to B$ è un isomorfismo di varietà, quindi $\dot{w}T\dot{w}^{-1}$ e $\dot{w}U_\alpha\dot{w}^{-1}$ per $\alpha \in R^+$ generano $\dot{w}B\dot{w}^{-1}$, a sua volta un sottogruppo di Borel, e il loro prodotto è un isomorfismo di varietà. Ma $\dot{w}T\dot{w}^{-1} = T$ e $\dot{w}U_\alpha\dot{w}^{-1} = U_{w.\alpha}$ per 4.1.4, segue la tesi. □

Il risultato che segue mette in relazione i vari U_α con l'intero gruppo G.

Proposizione 4.1.8. *G è generato da T e dai gruppi $U_{\pm\alpha}$ con $\alpha \in D$, l'insieme delle radici semplici.*

Dimostrazione. Sia G_1 il sottogruppo di G generato da T e $U_{\pm\alpha}$ ($\alpha \in D$). Per 1.1.6 G_1 è chiuso e connesso, inoltre per 1.9.4 (iii) contiene tutti i sottogruppi G_α con $\alpha \in D$. Di conseguenza il gruppo di Weyl W_1 di (G_1, T), sottogruppo di W in quanto dato da

$$\begin{aligned} W_1 &= N_{G_1}(T)/Z_{G_1}(T) \\ &= (N_G(T) \cap G_1)/(Z_G(T) \cap G_1) \\ &= (N_G(T) \cap G_1)/((N_G(T) \cap G_1) \cap Z_G(T)) \\ &= ((N_G(T) \cap G_1)Z_G(T))/Z_G(T) \end{aligned}$$

contiene le riflessioni semplici. Ma per 2.3.7 (iii) queste ultime generano W, quindi $W_1 = W$. Da 2.3.7 (ii) e 4.1.4 vediamo che G_1 contiene tutti gli U_α ($\alpha \in R$), quindi $G_1 = G$ per 4.1.1 (ii). □

La prossima proposizione ci dà informazioni sul prodotto fra elementi di diversi U_α al variare di α. In particolare, ci consentirà in futuro di definire una struttura di gruppo sul prodotto di vari U_α con α appartenente a determinati sottoinsiemi di R.

Poniamo $(g, h) = ghg^{-1}h^{-1}$ $(g, h \in G)$.

Proposizione 4.1.9. *Siano $\alpha, \beta \in R$, $\alpha \neq \pm\beta$. Fissato un ordinamento totale su R, esistono costanti $c_{\alpha,\beta;i,j} \in k$ tali che*

$$(u_\alpha(x), u_\beta(y)) = \prod_{i\alpha + j\beta \in R; i,j > 0} u_{i\alpha+j\beta}(c_{\alpha,\beta;i,j}x^i y^j) \qquad (x, y \in k)$$

dove i fattori nel membro di destra sono ordinati come stabilito.

Dimostrazione. Usando 2.2.3 e 4.1.4 possiamo ricondurci al caso $\alpha, \beta \in R^+$. Allora $U_\alpha, U_\beta \in U$ e, per 4.1.6

$$(u_\alpha(x), u_\beta(y)) = \prod_{\gamma \in R^+} u_\gamma(P_\gamma(x, y))$$

con $P_\gamma \in k[X, Y]$ e i fattori ordinati come precedentemente stabilito. Coniugando per $t \in T$ otteniamo

$$\begin{aligned}
&\prod_{\gamma \in R^+} u_\gamma(\gamma(t) P_\gamma(x, y)) \\
&= \prod_{\gamma \in R^+} t u_\gamma(P_\gamma(x, y)) t^{-1} = t \left(\prod_{\gamma \in R^+} u_\gamma(P_\gamma(x, y)) \right) t^{-1} \\
&= t(u_\alpha(x), u_\beta(y)) t^{-1} = (t u_\alpha(x) t^{-1}, t u_\beta(y) t^{-1}) = (u_\alpha(\alpha(t)x), u_\beta(\beta(t)y)) \\
&= \prod_{\gamma \in R^+} u_\gamma(P_\gamma(\alpha(t)x, \beta(t)y))
\end{aligned}$$

da cui, sempre per 4.1.6,

$$\gamma(t) P_\gamma(x, y) = P_\gamma(\alpha(t)x, \beta(t)y)$$

Dato che l'uguaglianza deve essere vera "termine a termine", se $P_\gamma \neq 0$ si deve avere $\gamma(t) = \alpha(t)^i \beta(t)^j$, cioè $\gamma = i\alpha + j\beta$, con $i, j \geq 0$. Dato che per 3.2.3 α e β sono linearmente indipendenti, tali i e j sono unici, da cui $P_\gamma(x, y) = c_{\alpha,\beta;i,j} x^i y^j$.

Resta da mostrare che $i, j > 0$; supponiamo per assurdo $j = 0$. Allora, sempre per 3.2.3 si deve avere $i = 1$, da cui

$$(u_\alpha(x), u_\beta(y)) = \left(\prod_{\gamma \in R^+; \gamma \prec \alpha} u_\gamma(P_\gamma(x, y)) \right) u_\alpha(c_{\alpha,\beta;1,0} x) \left(\prod_{\gamma \in R^+; \gamma \succ \alpha} u_\gamma(P_\gamma(x, y)) \right)$$

Ponendo $y = 0$ otteniamo

$$e = \left(\prod_{\gamma \in R^+; \gamma < \alpha} u_\gamma(P_\gamma(x, 0)) \right) u_\alpha(c_{\alpha,\beta;i,j} x) \left(\prod_{\gamma \in R^+; \gamma > \alpha} u_\gamma(P_\gamma(x, 0)) \right)$$

assurdo per 4.1.6. □

4.2 Decomposizione di Bruhat

Questa è la sezione conclusiva della prima parte della tesi. Qui andremo a dimostrare il lemma di Bruhat, il quale ci permette di partizionare G in classi laterali doppie $C(w) = B\dot{w}B$ al variare di $w \in W$, cioè secondo la cosiddetta decomposizione di Bruhat. Per far ciò introdurremo dei sottogruppi U_w di B, uno per ogni elemento di $w \in W$, che ci aiuteranno a caratterizzare le classi $C(w)$, il tutto utilizzando ampiamente la teoria sulla decomposizione ridotta sviluppata alla fine del secondo capitolo.

4.2.1. Sapendo che R^+ è un sistema di radici positive, dalla definizione si evince che anche $-R^+$ è un sistema di radici positive, quindi per 2.3.7 (i) esiste $w_0 \in W$ con $w_0.R^+ = -R^+$, unico per 2.3.8. w_0 è anche l'unico elemento di W per cui $l(w) = \#|R^+|$. Notiamo che $w_0^2.R^+ = R^+$, quindi sempre per 2.3.8 $w_0^2 = e$.

4.2.2. Ricordando l'ordinamento definito in 3.1.5, se $x, y \in X(T)$ e $x \geq y$, allora $w_0.x \leq w_0.y$: infatti, se $x = y + \sum_{\alpha \in R^+} n_\alpha \alpha$, allora $w_0.y = w_0.x + \sum_{\alpha \in R^+} n_\alpha(-w_0.\alpha) = w_0.x + \sum_{\alpha \in R^+} n_{-w_0.\alpha}\alpha$.

Ricordando la definizione di $R(w)$ per $w \in W$ data in 2.4.1, introduciamo subito i sottogruppi U_w.

Lemma 4.2.3. *Sia $w \in W$.*

(i) I gruppi U_α con $\alpha \in R(w)$ generano un sottogruppo U_w di U chiuso, connesso e normalizzato da T. Infatti si ha $U_w = \prod_{\alpha \in R(w)} U_\alpha$, dove il prodotto può essere considerato in qualsiasi ordine;

(ii) il morfismo $U_w \times U_{w_0 w} \to U$ indotto dal prodotto è un isomorfismo di varietà.

Dimostrazione.

(i) Dato che i sottogruppi U_α $(\alpha \in R(w))$ sono chiusi, connessi e normalizzati da T, anche U_w è chiuso e connesso per 1.1.6 e normalizzato da T.

Affinché $\widehat{U}_w = \prod_{\alpha \in R(w)} U_\alpha$ coincida con U_w ci basta mostrare che tale prodotto è effettivamente un gruppo.

Per ogni $\alpha, \beta \in R(w)$ con $\alpha \neq \beta$, diciamo che $\alpha \prec \beta$ se U_α precede (strettamente) U_β nell'ordine in cui si svolge il prodotto di $\widehat{U}_w$. Estendiamo inoltre, solo per questa dimostrazione, l'ordinamento 3.1.5 a un ordinamento totale su R.

Data una stringa $u = u_{\alpha_{j_1}} u_{\alpha_{j_2}} \dots u_{\alpha_{j_n}}$ con $\alpha_{j_i} \in R(w)$ e $u_{\alpha_{j_i}} \in U_{\alpha_{j_i}}$, sia

$$f(u) = \min\{\infty\} \cup \{\alpha \in R(w) \mid \exists\, i_1, i_2 : \alpha_{j_{i_1}}, \alpha_{j_{i_2}} \leq \alpha \ \wedge\ i_1 < i_2 \ \wedge\ \alpha_{j_{i_1}} \succeq \alpha_{j_{i_2}}\}$$

dove si intende $\infty > \alpha$ per ogni $\alpha \in R$. Notiamo che, se $f(u) = \infty$, allora l'elemento che u rappresenta appartiene a $\widehat{U}_w$.

Mostriamo per induzione decrescente sul valore di f che ogni stringa u del tipo descritto in precedenza è equivalente (come elemento) a una stringa u' con $f(u') = \infty$. Il caso base $f(u) = \infty$ è valido per ipotesi, supponiamo $f(u) = \alpha$ e che la tesi sia vera per ogni radice più grande di α.

Preso i con $\alpha_{j_i} = \alpha$, abbiamo

$$\begin{aligned}
u_{\alpha_{j_i}} u_{\alpha_{j_{i+1}}} &= u_{\alpha_{j_i}} u_{\alpha_{j_{i+1}}} u_{\alpha_{j_i}}^{-1} u_{\alpha_{j_{i+1}}}^{-1} u_{\alpha_{j_{i+1}}} u_{\alpha_{j_i}} \\
&= (u_{\alpha_{j_i}}, u_{\alpha_{j_{i+1}}}) u_{\alpha_{j_{i+1}}} u_{\alpha_{j_i}} \\
&= \left(\prod_{h\alpha_{j_i} + k\alpha_{j_{i+1}} \in R; h,k>0} u_{h\alpha_{j_i} + k\alpha_{j_{i+1}}} \right) u_{\alpha_{j_{i+1}}} u_{\alpha_{j_i}}
\end{aligned}$$

per alcuni elementi $u_{h\alpha_{j_i}+k\alpha_{j_{i+1}}}$, dove l'ultimo passaggio segue da 4.1.9.

Un risultato simile si ottiene con $u_{\alpha_{j_{i-1}}}u_{\alpha_{j_i}}$ al posto di $u_{\alpha_{j_i}}u_{\alpha_{j_{i+1}}}$. Detta u' la stringa ottenuta con una delle due precedenti sostituzioni, si verifica facilmente che $f(u') \geq f(u)$ e il numero di indici i tali che $\alpha_{j_i} = \alpha$ non è aumentato. Effettuando una successione di sostituzioni, possiamo accorpare i vari $u_{\alpha_{j_i}}$ con $\alpha_{j_i} = \alpha$ fin quando ne rimane al più uno e poi eventualmente spostare quest'ultimo nella stringa in modo che alla fine, per ogni $i_1, i_2 \leq \alpha$ si abbia $i_1 < i_2$ se e solo se $\alpha_{j_{i_1}} \prec \alpha_{j_{i_2}}$. In questo maniera troviamo una stringa u' con $f(u') > f(u)$, concludendo per ipotesi induttiva.

Arrivati a questo punto, ci basta notare che il prodotto di due elementi $u_1 \dots u_n$ e $v_1 \dots v_n$ di $\widehat{U}_w$ è la stringa $u_1 \dots u_n v_1 \dots v_n$ e l'inverso del primo elemento è la stringa $u_n^{-1} \dots u_1^{-1}$, entrambe stringhe del tipo considerato, quindi elementi di $\widehat{U}_w$. In questo modo concludiamo che $\widehat{U}_w$ è chiuso per moltiplicazione e inverso, quindi è un sottogruppo;

(ii) notiamo che $R^+ = R(w) \sqcup R(w_0 w)$, quindi ricordando 4.1.6 abbiamo un isomorfismo di varietà

$$U_w \times U_{w_0 w} = \prod_{\alpha \in R(w)} U_\alpha \times \prod_{\alpha \in R(w_0 w)} U_\alpha \simeq \prod_{\alpha \in R+} U_\alpha \simeq U$$

□

Il seguente lemma sarà utile per dimostrare il risultato successivo.

Lemma 4.2.4. *Sia H un sottogruppo chiuso non nullo di B_u normalizzato da T, allora esiste $\alpha \in R^+$ tale che $U_\alpha \subset H$.*

Dimostrazione. Iniziamo notando che esiste $t \in T$ tale che $\alpha(t) \neq \beta(t)$ per ogni $\alpha, \beta \in R^+$ con $\alpha \neq \beta$. Infatti sia $f : T \to k$ la funzione regolare data da

$$f(t) = \prod_{\alpha,\beta \in R,\ \alpha \neq \beta} (\alpha(t) - \beta(t))$$

Se per assurdo non esistesse un tale t, si avrebbe $f(t) = 0$ per ogni t. Detti $T^0_{\alpha-\beta} = \{t \in T \mid \alpha(t) = \beta(t)\}$, che notiamo essere chiusi, si ha $T = \bigcup_{\alpha,\beta \in R,\ \alpha \neq \beta} T^0_{\alpha-\beta}$, quindi esistono $\alpha, \beta \in R$, $\alpha \neq \beta$ tali che $T^0_{\alpha-\beta} = T$ per irriducibilità di T, che ricordiamo essere prodotto di copie dell'irriducibile k^*. Ma allora $\alpha = \beta$, assurdo, sia quindi t_0 un elemento di T che soddisfa la proprietà enunciata.

Ricordiamo che l'algebra di Lie di B_u è $\bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$, quindi, preso un elemento X dell'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ di H, possiamo scrivere $X = \sum_{\alpha \in R^+} X_\alpha$ con $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. L'azione di T per coniugio su H induce un'azione su $\mathfrak{h}$, esplicitamente data da

$$t.X = t. \sum_{\alpha \in R^+} X_\alpha = \sum_{\alpha \in R^+} t.X_\alpha = \sum_{\alpha \in R^+} \alpha(t) X_\alpha$$

Numerando le radici da 1 a $r = \#|R^+|$ e facendo agire $e, t_0, t_0^2, \dots, t_0^{r-1}$ su X otteniamo il sistema lineare $(X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_r})M = (X, t_0.X, t_0^2.X, \dots, t_0^{r-1}.X)$, dove M è la matrice $r \times r$ di Vandermonde nei valori $(\alpha_1(t_0), \dots, \alpha_r(t_0))$. Essendo gli $\alpha_j(t_0)$ tutti distinti, M è invertibile, dunque possiamo ottenere i vari X_{α_j} come combinazione lineare dei $t^j.X$, in particolare, $X_{\alpha_j} \in \mathfrak{h}$ per ogni j.

Prendiamo ora $X \in \mathfrak{h}$ con $X \neq 0$ e sia $\alpha \in R^+$ tale che $X_\alpha \neq 0$. Per quanto appena detto $X_\alpha \in \mathfrak{h}$, quindi $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{h}$ e per 1.4.7 questo equivale a $U_\alpha \subset H$.

□

Indichiamo con $C(w)$ la classe laterale doppia $B\dot{w}B$.

Il lemma che segue fornisce una descrizione della struttura dei $C(w)$ attraverso degli isomorfismi di varietà con alcuni sottogruppi noti.

Lemma 4.2.5. *Sia $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_h)$ una decomposizione ridotta di $w \in W$, con $s_i = s_{\alpha_i}$ ($\alpha_i \in D$).*

(i) Il morfismo $\phi : \mathbb{G}_a^h \times B \to G$ dato da

$$\phi(x_1, \dots, x_h; b) = u_{\alpha_1}(x_1)\dot{s}_1 u_{\alpha_2}(x_2)\dot{s}_2 \dots u_{\alpha_h}(x_h)\dot{s}_h b$$

induce un isomorfismo $\mathbb{G}_a^h \times B \simeq C(w)$;

(ii) La mappa $(u, b) \mapsto u\dot{w}b$ è un isomorfismo di varietà $U_{w^{-1}} \times B \simeq C(w)$.

Dimostrazione.

(i) Notiamo che $C(w) = B\dot{w}B = UT\dot{w}B = U\dot{w}TB = U_{w^{-1}}U_{w_0w^{-1}}\dot{w}B$ per 4.2.3 (ii). Da 4.1.4 si ha

$$\dot{w}^{-1}U_{w_0w^{-1}}\dot{w} = \prod_{\alpha \in R(w_0w^{-1})} \dot{w}^{-1}U_\alpha\dot{w} = \prod_{\alpha \in R(w_0w^{-1})} U_{w^{-1}.\alpha} = \prod_{\alpha \in w^{-1}.R(w_0w^{-1})} U_\alpha$$

Se $\alpha \in w^{-1}.R(w_0w^{-1})$, allora $w_0w^{-1}.w.\alpha \in -R^+$, cioè $\alpha \in R^+$ e quindi $U_\alpha \subset B$. Segue che $\dot{w}^{-1}U_{w_0w^{-1}}\dot{w} \subset B$ da cui $C(w) = U_{w^{-1}}\dot{w}(\dot{w}^{-1}U_{w_0w^{-1}}\dot{w})B = U_{w^{-1}}\dot{w}B$. Visto che $\mathbf{s}^{-1} = (s_h^{-1}, \dots, s_1^{-1}) = (s_h, \dots, s_1)$ è una decomposizione ridotta di w^{-1}, da 2.4.4 (i), $R(w^{-1}) = \{\alpha_1, s_1.\alpha_2, \dots, s_1 \dots s_{h-1}.\alpha_h\}$. Usando 4.1.4 otteniamo

$$\begin{aligned} U_{w^{-1}} &= U_{\alpha_1}U_{s_1.\alpha_2} \dots U_{s_1 \dots s_{h-1}.\alpha_h} \\ &= U_{\alpha_1}\dot{s_1}U_{\alpha_2}\dot{s_1}^{-1} \dots \dot{s_1}U_{s_2 \dots s_{h-1}.\alpha_h}\dot{s_1}^{-1} \\ &= U_{\alpha_1}\dot{s_1}(U_{\alpha_2} \dots U_{s_2 \dots s_{h-1}.\alpha_h})\dot{s_1}^{-1} \\ &= U_{\alpha_1}(\dot{s_1}U_{w^{-1}s_1}\dot{s_1}^{-1}) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
C(w) &= U_{w^{-1}}\dot{w}B \\
&= U_{\alpha_1}(\dot{s_1}U_{w^{-1}s_1}\dot{s_1}^{-1})\dot{w}B \\
&= U_{\alpha_1}\dot{s_1}U_{(s_1^{-1}w)^{-1}}(\dot{s_1}^{-1}\dot{w})B \\
&= U_{\alpha_1}\dot{s_1}U_{(s_1w)^{-1}}(\dot{s_1w})B \\
&= U_{\alpha_1}\dot{s_1}C(s_1w)
\end{aligned}$$

Per induzione su $h = l(w)$ possiamo assumere la tesi vera per $s_1w = s_2 \dots s_h$. Questo ci garantisce la suriettività di ϕ su $C(w)$. Per 4.2.3 (i) e 4.1.1 (i) sappiamo che la mappa $\mathbb{G}_a^h \times B \to U_{w^{-1}} \times B$ data da $(x_1, \dots, x_h; b) \mapsto (u_{\alpha_1}(x_1) \dots u_{s_1 \dots s_{h-1}.\alpha_h}(x_h), b)$ è un isomorfismo. Dato che $wu_\alpha(x)w^{-1} = u_{w.\alpha}(c_{w,\alpha}x)$ per 4.1.4, come si è mostrato nei precedenti passaggi

$$\phi : \mathbb{G}_a^h \times B \xrightarrow{(\cdot d_1, \dots, \cdot d_h; \mathrm{Id})} \mathbb{G}_a^h \times B \xrightarrow{(u_{\alpha_1}(\cdot) \dots u_{s_1 \dots s_{h-1}.\alpha_h}(\cdot), \mathrm{Id})} U_{w^{-1}} \times B \xrightarrow{\text{morfismo di (ii)}} C(w)$$

cioè ϕ è composizione dell'isomorfismo $\mathbb{G}_a^h \times B \to U_{w^{-1}} \times B$ appena costruito e del morfismo del punto (ii), a meno di riscalare i singoli termini di $\mathbb{G}_a^h$, a sua volta un isomorfismo. Ci siamo perciò ricondotti a dimostrare il punto (ii);

(ii) la tesi è equivalente a mostrare che $\psi : U_{w^{-1}} \times B \to \dot{w}^{-1}.C(w)$ dato da $\psi(u, b) = \dot{w}^{-1}u\dot{w}b^{-1}$ è un isomorfismo.

Facciamo agire $U_{w^{-1}} \times B$ su se stesso come traslazione sinistra e su $\dot{w}^{-1}.C(w)$ mediante l'azione data da $(u, b).c = \dot{w}^{-1}u\dot{w}cb^{-1}$. Notiamo che entrambi gli spazi sono omogenei rispetto quest'azione, inoltre

$$\begin{aligned}
\psi((u, b).(u', b')) &= \psi(uu', bb') \\
&= \dot{w}^{-1}uu'\dot{w}(bb')^{-1} \\
&= \dot{w}^{-1}u\dot{w}(\dot{w}^{-1}u'\dot{w}b'^{-1})b \\
&= (u, b).(\dot{w}^{-1}u'\dot{w}b'^{-1}) \\
&= (u, b).\psi(u', b')
\end{aligned}$$

cioè ψ è un morfismo equivariante. Più in generale, $\psi(u, b) = (u, b).\psi(e, e) = (u, b).e$, cioè ψ corrisponde all'azione di $U_{w^{-1}} \times B$ sull'identità. Per 1.5.4 è sufficiente mostrare che ψ è bigettiva affinché sia un isomorfismo.

La suriettività è immediata da verificare, mentre per l'iniettività basta mostrare che $H = \mathrm{Stab}_{U_{w^{-1}} \times B}(e) = (e, e)$. H è un sottogruppo chiuso di $U_{w^{-1}} \times B$, in quanto controimmagine del chiuso $\{e\}$ rispetto l'azione di $U_{w^{-1}} \times B$ su e.

Preso $(u,b) \in H$ e $t \in T$ si ha

$$e = tet^{-1} = t(\dot{w}^{-1}u\dot{w}b^{-1})t^{-1} = \dot{w}^{-1}((\dot{w}t\dot{w}^{-1})u(\dot{w}t\dot{w}^{-1})^{-1})\dot{w}(tbt^{-1})^{-1}$$

Dato che $\dot{w}$ normalizza T e T normalizza sia $U_{w^{-1}}$ che B si ha $((\dot{w}t\dot{w}^{-1})u(\dot{w}t\dot{w}^{-1})^{-1}, tbt^{-1}) \in H$. Sia H_1 il gruppo ottenuto mediante la proiezione sulla prima componente di H, chiuso per 1.1.5 dato che H, essendo un sottogruppo chiuso di un gruppo algebrico, è un gruppo algebrico. Per quanto appena visto H_1 è un sottogruppo di $U_{w^{-1}}$ normalizzato da $\dot{w}T\dot{w}^{-1} = T$. Se $H_1 = \{e\}$ è immediato vedere che $H = (e,e)$, altrimenti per 4.2.4 esiste $\alpha \in R^+$ con $U_\alpha \subset H_1$. Ricordando la definizione di $U_{w^{-1}}$ e notando che $U_\alpha \subset U_{w^{-1}}$ si deve avere $\alpha \in R(w^{-1})$, cioè $w^{-1}.\alpha \in -R^+$, altrimenti quello di 4.2.3 (ii) non sarebbe un isomorfismo. Per ogni $u \in U_\alpha$ esiste $b \in B$ con $(u,b) \in H$, cioè con $\dot{w}^{-1}u\dot{w} = b$, ma allora $U_{w^{-1}.\alpha} = \dot{w}^{-1}U_\alpha\dot{w} \subset B$, assurdo per 4.1.3 (i).

□

Notiamo come la dimensione delle classi laterali doppie sia strettamente legata alla lunghezza degli elementi di W:

Corollario 4.2.6. *Dato $w \in W$ si ha*

$$\dim(C(w)) = l(w) + \dim(B) = \dim(G) - (\#|R^+| - l(w))$$

In particolare $\dim(C(w_0)) = \dim(G)$*,* $\dim(C(s_\alpha.w_0)) = \dim(G) - 1$ *per ogni* $\alpha \in D$*, mentre* $\dim(C(w)) \leq \dim(G) - 2$ *per ogni altro* $w \in W$*.*

Dimostrazione. La tesi discende direttamente dal precedente teorema. □

Presentiamo un risultato che sarà fondamentale nella dimostrazione del teorema di Borel-Weil.

Corollario 4.2.7. *$C(w_0)$ è un aperto denso di G*

Dimostrazione. Per 1.1.4 (ii) le nozioni di componente connessa e irriducibile coincidono, quindi G è irriducibile, e dato che $\dim(C(w_0)) = \dim(G)$ per 4.2.6 si ha $\overline{C(w_0)} = G$, cioè $C(w_0)$ è denso in G. Considerando $C(w_0) = B\dot{w}_0B$ come un $B \times B$ spazio tramite le traslazioni sinistra e destra, per 1.2.2 $C(w_0)$ è aperto nella suo chiusura, quindi è un aperto di G. □

Prima di dimostrare il lemma di Bruhat è necessario un ultimo risultato sul prodotto fra alcune classi laterali doppie.

Lemma 4.2.8. *Siano $w \in W$, $s \in S$, allora*

$$\begin{aligned} C(s).C(w) &= C(sw) && \textit{se} \quad l(sw) = l(w) + 1 \\ C(s).C(w) &= C(w) \cup C(sw) && \textit{se} \quad l(sw) = l(w) - 1 \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $s = s_\alpha = s_{-\alpha}$ ($\alpha \in D$). Per 4.2.5 (ii), $C(s) = U_\alpha \dot{s} B$, quindi $C(s).C(w) = (U_\alpha \dot{s} B)(B\dot{w}B) = U_\alpha \dot{s} C(w)$.

Se $l(sw) = l(w) + 1$, la tesi segue ripercorrendo parte della dimostrazione di 4.2.5 (i): presa una decomposizione ridotta di w, si può ottenere una decomposizione ridotta di sw aggiungendo s in testa alla precedente, da cui $C(sw) = U_\alpha \dot{s} C(s(sw)) = U_\alpha \dot{s} C(w) = C(s).C(w)$.

Se invece $l(sw) = l(w) - 1$, in modo simile al caso precedente si trova

$$C(s).C(w) = C(s).C(s(sw)) = C(s).C(s).C(sw)$$

Supponiamo che $C(s).C(s) = C(e) \cup C(s)$; allora

$$\begin{aligned} C(s).C(w) &= C(s).C(s).C(sw) = (C(e) \cup C(s)).C(sw) \\ &= B(B\dot{(sw)}B) \cup C(s).C(sw) = C(sw) \cup C(w) \end{aligned}$$

Non ci resta che mostrare quest'ultima assunzione. Sia G_α il gruppo definito in 1.8.3, allora $U_\alpha \subset G_\alpha$ e $B_\alpha = B \cap G_\alpha$ è un sottogruppo di Borel di G_α per 1.7.7. Dato che $C(s).C(s) = U_\alpha \dot{s} U_\alpha \dot{s} B = U_\alpha \dot{s} U_\alpha \dot{s} B_\alpha B$ e che $C(e) \cup C(s) = B \cup U_\alpha \dot{s} B = (B_\alpha \cup U_\alpha \dot{s} B_\alpha)B$, ci basta mostrare che $U_\alpha \dot{s} U_\alpha \dot{s} B_\alpha = B_\alpha \cup U_\alpha \dot{s} B_\alpha$, cioè è sufficiente restringersi a gruppi di rango semi-semplice 1.

Si assuma $G = G_\alpha$, e ricordando che il radicale $R(G)$ di G è un toro centrale normale, abbiamo $B = UT = U(T/R(G))R(G)$ e $B/R(G) = U(T/R(G))$, quindi in maniera simile alla precedente possiamo ulteriormente restringerci a mostrare che $C(s)/R(G).C(s)/R(G) = U\dot{s}U\dot{s}U(T/R(G)) = U(T/R(G)) \cup U\dot{s}U(T/R(G)) = C(e)/R(G) \cup C(s)/R(G)$, cioè possiamo assumere G semi-semplice.

Per 1.9.1 G è isomorfo a $\mathbf{SL}_2$ o $\mathbf{PSL}_2$. Se $G \simeq \mathbf{PSL}_2$, possiamo considerare l'omomorfismo di gruppi algebrici $\pi : \mathbf{SL}_2 \to \mathbf{PSL}_2$ definito in 1.9.2 e scegliere un sottogruppo di Borel e un rappresentante del gruppo di Weyl in $\mathbf{SL}_2$ che vengano mappati da π nei corrispettivi di $\mathbf{PSL}_2$.

Rimane dunque come unico caso da trattare $G = \mathbf{SL}_2$ e a meno di coniugio B, U e $\dot{s}$ corrispondono alle matrici del tipo

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \right\} \qquad U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \dot{s} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (a \in k,\ \lambda \in k^*)$$

Siano

$$p(a,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} q(a,b,\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a\lambda & -ab+\lambda^{-1} \\ -\lambda & -b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(a,b,c,\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(ab-1) & c(ab-1)-a\lambda^{-1} \\ b\lambda & bc-\lambda^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

generici elementi di rispettivamente $C(e)$, $C(s)$, $C(s).C(s)$, con $a,b,c \in k$, $\lambda \in k^*$.

Consideriamo un elemento $r(a,b,c,\lambda)$ di $C(s).C(s)$. Se $b = 0$ abbiamo $p(-c - a\lambda^{-1}, -\lambda) = r(a,0,c,\lambda)$; se invece $b \neq 0$ abbiamo $q(a-b^{-1}, \lambda^{-1} - bc, -b\lambda) = r(a,b,c,\lambda)$. Questo mostra che $C(s).C(s) \subset C(e) \cup C(s)$.

Consideriamo un elemento $p(a,\lambda)$ di $C(e)$, allora $r(0,0,-a,-\lambda) = p(a,\lambda)$. Consideriamo un elemento $q(a,b,\lambda)$ di $C(s)$, allora $r(a+1,1,-b-\lambda^{-1},-\lambda) = q(a,b,\lambda)$. Questo mostra che $C(e) \cup C(s) \subset C(s).C(s)$, ottenendo l'uguaglianza dei membri e concludendo la dimostrazione.

□

Arrivati a questo punto, possediamo tutti gli strumenti necessari a dimostrare il lemma di Bruhat, obbiettivo principale della prima parte della tesi.

Teorema 4.2.9 (Lemma di Bruhat)**.**
G è unione disgiunta della classi laterali doppie $C(w)$ ($w \in W$).

Dimostrazione. Sia $G_1 = \bigcup_{w\in W} C(w)$ e sia $s = s_\alpha \in S$.

Dal precedente lemma abbiamo che

$$\bigcup_{w\in W} C(w) = \bigcup_{w\in W} C(sw) \subset \bigcup_{w\in W} C(s).C(w) \subset \bigcup_{w\in W} C(w) \cup C(sw) = \bigcup_{w\in W} C(w)$$

dunque $C(s).G_1 = \bigcup_{w\in W} C(s).C(w) = \bigcup_{w\in W} C(w) = G_1$.

Dato che $T, U_\alpha \subset B$ e $C(w) = B\dot{w}B$, abbiamo che $C(w)$ è stabile per moltiplicazione di T e U_α per ogni $w \in W$, quindi anche G_1.

Inoltre

$$U_{-\alpha}.G_1 = \dot{s_\alpha} U_\alpha \dot{s_\alpha}.G_1 = \dot{s_\alpha}(U_{s_\alpha^{-1}} \dot{s_\alpha} B).G_1 = \dot{s_\alpha} C(s_\alpha).G_1 = \dot{s_\alpha}.G_1 = \dot{s_\alpha} C(s_\alpha w_0).G_1$$

Ma, notando che $(s_\alpha w_0)^{-1} = w_0 s_\alpha$, si trova

$$\begin{aligned}\dot{s_\alpha} C(s_\alpha w_0) &= \dot{s_\alpha}(U_{w_0 s_\alpha} \dot{s_\alpha} \dot{w}_0 B) = \dot{s_\alpha} \left(\prod_{\beta \in R(w_0 s_\alpha)} U_\beta \right) \dot{s_\alpha} \dot{w}_0 B \\ &= \left(\prod_{\beta \in R(w_0 s_\alpha)} \dot{s_\alpha} U_\beta \dot{s_\alpha} \right) \dot{w}_0 B = \left(\prod_{\beta \in R(w_0 s_\alpha)} U_{s_\alpha . \beta} \right) \dot{w}_0 B \\ &= \left(\prod_{\beta \in s_\alpha . R(w_0 s_\alpha)} U_\beta \right) \dot{w}_0 B\end{aligned}$$

Per 2.4.2, dato che $w_0 s_\alpha . \alpha = \alpha \in R^+$, si ha che $s_\alpha . R(w_0 s_\alpha) \subset R(w_0)$, perciò

$$\dot{s_\alpha} C(s_\alpha w_0) \subset \left(\prod_{\beta \in R(w_0)} U_\beta \right) \dot{w}_0 B = U_{w_0} \dot{w}_0 B = C(w_0)$$

da cui $U_{-\alpha}.G_1 = \dot{s_\alpha} C(s_\alpha w_0).G_1 \subset C(w_0).G_1 = G_1$. L'inclusione $G_1 \subset U_{-\alpha}.G_1$ è scontata, quindi G_1 è stabile anche per moltiplicazione per $U_{-\alpha}$. Dato che T, U_α e $U_{-\alpha}$ $(\alpha \in D)$ generano G per 4.1.8, $G_1 = G$.

Questo mostra che G è unione delle classi laterali doppie $C(w)$, procediamo a mostrare che tale unione è disgiunta. Siano $w, w' \in W$ e supponiamo $C(w) \cap C(w') \neq \emptyset$.

Essendo entrambi orbite dell'azione

$$(B \times B) \times G \to G \qquad (b, b'; g) \mapsto bgb'^{-1}$$

si deve avere $C(w) = C(w')$.

È sufficiente mostrare che $C(w) = C(w')$ implica $w = w'$. Per 4.2.6

$$l(w) = \dim(C(w)) - \dim(B) = \dim(C(w')) - \dim(B) = l(w')$$

Se $l(w) = l(w') = 0$ si ha necessariamente $w = e = w'$, quindi possiamo supporre $l(w) > 0$ e procedere induttivamente su $l(w)$. Sia s il primo elemento di una decomposizione ridotta di w, in modo che $l(sw) = l(w) - 1$. Per 4.2.8

$$C(sw) \subset C(s).C(w) = C(s).C(w') \subset C(w') \cup C(sw')$$

quindi $C(sw) = C(w')$ o $C(sw) = C(sw')$ per quanto appena mostrato. Il primo caso implica $l(sw) = l(w') = l(w)$ per quanto visto poche righe fa, assurdo. Il secondo caso implica, per ipotesi induttiva, che $sw = sw'$, quindi $w = w'$. □

Come conseguenza otteniamo una scrittura univoca di ogni elemento di G nel seguente modo:

Corollario 4.2.10 (Decomposizione di Bruhat)**.**
Ogni elemento di G può scrivere univocamente nella forma $u\dot{w}b$ con $w \in W$, $u \in U_{w^{-1}}$, $b \in B$.

Dimostrazione. La tesi discende direttamente dal teorema precedente e da 4.2.5 (ii). $\square$

Parte II

G - Moduli

Capitolo 5

Prerequisiti

5.1 G-Moduli

In questa sezione riprenderemo il concetto di G-modulo, già introdotto nel primo capitolo, e lo amplieremo, andando a parlare del funtore punto fisso, di semplicità, di zoccoli e di altre proprietà necessarie allo sviluppo della teoria.

Sia G un gruppo algebrico lineare.

Utilizzeremo spesso la nozione di *modulo* intendendo k-modulo, cioè k-spazio vettoriale, e di *omomorfismo di moduli* intendendo mappa k-lineare.

Ricordiamo la definizione di G-modulo data in 1.2.3.

Un *omomorfismo di G-moduli* è un omomorfismo di moduli G-equivariante. Dati due G-moduli M, M' indichiamo l'insieme degli omomorfismi con $\mathrm{Hom}_G(M, M')$.

Dato un sottogruppo H di G e un G-modulo M, un *H-sottomodulo* N di M è un sottospazio $N \subset M$ che è anche un H-modulo con l'azione indotta dall'azione di M.

5.1.1. Dato un G-modulo M, possiamo considerare il sottomodulo formato dai punti fissi

$$M^G = \{m \in M \mid g.m = m \quad \forall g \in G\}$$

Generalizziamo questa nozione ponendo per ogni carattere $\chi \in X(G)$

$$M_\chi = \{m \in M \mid g.m = \chi(g)m\}$$

Nei prossimi capitoli faremo ampio uso di questa notazione, dove al posto del gruppo G ci sarà un toro massimale T di G.

Si verifica facilmente che $M \mapsto M_\chi$ è un funtore esatto a sinistra fra G-moduli, quindi preserva le immersioni, e, dati due G-moduli E ed F, è immediato vedere che $(E \oplus F)_\chi = E_\chi \oplus F_\chi$. Nel caso χ sia il carattere banale, il funtore in questione è detto punto fisso ed è dato da $M \mapsto M^G$. Segue che $M \mapsto M^G$ è esatto a sinistra, quindi preserva le immersioni, e $(E \oplus F)^G = E^G \oplus F^G$.

5.1.2. In modo simile a quanto fatto con la comoltiplicazione in 1.1.3 e in 1.2.4, si può introdurre la mappa di comodulo $\Delta_M : M \to M \otimes k[G]$. Le proprietà dell'azione di G su M implicano che Δ_M soddisfi le relazioni

$$(\Delta_M \otimes \mathrm{Id}_{k[G]}) \circ \Delta_M = (\mathrm{Id}_M \otimes \Delta) \circ \Delta_M$$
$$(\mathrm{Id}_M \overline{\otimes} \epsilon) \circ \Delta_M = \mathrm{Id}_M$$

Utilizzando questa mappa si può dimostrare un risultato simile a 1.2.5 procedendo nello stesso modo:

Lemma 5.1.3. *Sia M un G-modulo, allora ogni k-sottomodulo di M di dimensione finita è contenuto in un G-sottomodulo di M di dimensione finita.*

Introduciamo i concetti di G-modulo semplice e di zoccolo, poi presentiamo alcuni risultati riguardanti quest'ultimo.

Definizione 5.1.4 (G-Modulo Semplice e Semi-Semplice)**.**
Un G-modulo M si dice *semplice* e la relativa rappresentazione *irriducibile* se $M \neq 0$ e M non ha G-sottomoduli diversi da 0 e M. Un G-modulo si dice *semi-semplice* se si può esprimere come somma diretta di moduli semplici.

Definizione 5.1.5 (Zoccolo)**.**
Dato un G-modulo M, chiamiamo *zoccolo* di M e denotiamo con $\mathrm{soc}_G(M)$ la somma diretta di tutti i suoi G-sottomoduli semplici.

Notiamo come lo zoccolo di un G-modulo sia il più grande G-sottomodulo semi-semplice di M.

Da 5.1.3 discende subito il seguente risultato:

Lemma 5.1.6.

(i) Ogni G-modulo semplice ha dimensione finita;

(ii) Sia M un G-modulo con $M \neq 0$, allora anche $\mathrm{soc}_G M \neq 0$.

Definizione 5.1.7 (Serie di Zoccoli)**.**
Dato un G-modulo M si può costruire iterativamente una successione di sottomoduli $\mathrm{soc}_G^i M$ ($i \in \mathbb{N}$), detta *serie di zoccoli*, in modo che

$$\mathrm{soc}_G^0 = 0 \ , \qquad \mathrm{soc}_G^i M / \mathrm{soc}_G^{i-1} M = \mathrm{soc}_G(M / \mathrm{soc}_G^{i-1} M) \quad \forall i > 0$$

Notiamo che $\mathrm{soc}_G^1 M = \mathrm{soc}_G M$ e che $0 = \mathrm{soc}_G^0 M \subset \mathrm{soc}_G^1 M \subset \mathrm{soc}_G^2 M \subset \dots$. Inoltre da 5.1.3 discende che $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{soc}_G^i M = M$.

Diciamo che un G-modulo semplice E è un *fattore di composizione* di un G-modulo M se E è un addendo nella somma diretta di $\mathrm{soc}_G(M/\mathrm{soc}_G^{i-1} M) = \mathrm{soc}_G^i M / \mathrm{soc}_G^{i-1} M$ per un qualche i.

Si può dimostrare che la molteplicità di E come addendo in $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{soc}_G^i M/\operatorname{soc}_G^{i-1} M$ è indipendente dalla scelta della serie di zoccoli.

Enunciamo infine due risultati sull'azione di gruppi unipotenti.

Lemma 5.1.8. *G è unipotente se e solo se l'unico G-modulo semplice è k, cioè l'unico modulo di dimensione 1 sul quale G agisce banalmente.*

Per il precedente lemma, se G è unipotente allora $\operatorname{soc}_G M = M^G$. Da questo risultato e da 5.1.6 (ii) si deduce il seguente:

Corollario 5.1.9. *G è unipotente se e solo se per ogni G-modulo $M \neq 0$ si ha $M^G \neq 0$.*

5.2 Restrizione, Induzione e Reciprocità di Frobenius

Come da titolo, in questa sezione si parlerà dei funtori restrizione e induzione e della reciprocità di Frobenius. Dati un gruppo algebrico lineare G e un sottogruppo H, questi funtori ci permettono di costruire H-moduli a partire da G-moduli e viceversa. La reciprocità di Frobenius collega i due funtori mediante una bigezione fra gli spazi degli omomorfismi dei G-moduli e degli H-moduli.

La definizione del funtore restrizione è intuitiva ed immediata:

Definizione 5.2.1 (Restrizione)**.** Sia G un gruppo algebrico lineare e sia H un sottogruppo di G. Ogni G-modulo M è un H-modulo in modo naturale restringendo l'azione di G ad H. Chiamiamo questo H-modulo *modulo ristretto di M da G in H* e denotiamolo con $\operatorname{Res}_H^G M$.

In questo modo possiamo definire un funtore

$$\operatorname{Res}_H^G : \{G\text{-moduli}\} \to \{H\text{-moduli}\}$$

Il funtore induzione invece è più complesso da definire. Il seguente lemma sarà necessario per costruzione del modulo indotto.

Lemma 5.2.2. *Sia G un gruppo algebrico lineare e siano H, H' sottogruppi di G con H' che normalizza H. Se M è un G-modulo, allora M^H è un H'-sottomodulo di M.*

Definizione 5.2.3 (Induzione)**.** Sia G un gruppo algebrico lineare e sia H un sottogruppo di G. Per ogni H-modulo M esiste una naturale struttura di $(G\times H)$-modulo su $M\otimes k[G]$ definita prendendo il prodotto tensore delle seguenti rappresentazioni di $G\times H$ su M e su $k[G]$: si fa agire G banalmente su M e per traslazione sinistra su $k[G]$, mentre si mantiene la struttura di H-modulo di M e si fa agire H per traslazione destra su $k[G]$. In altre parole, detta $\phi : H \times M \to M$ l'azione che definisce la struttura di H-modulo di M, si costruisce la nuova azione $\psi : (G \times H) \times (M \otimes k[G]) \to (M \otimes k[G])$ data da

$$\psi((g,h))(m\otimes f)(x) = (\phi(h)(m)\otimes f)(g^{-1}xh) = \phi(h)(m)\otimes f(g^{-1}xh)$$

Applicando il precedente lemma ai sottogruppi H, G di $G \times H$ e al $(G \times H)$-modulo $M \otimes k[G]$ troviamo che $(M \otimes k[G])^H$ è un G-sottomodulo di $M \otimes k[G]$. Chiamiamo questo G-modulo *modulo indotto di M da H in G* e denotiamolo con $\operatorname{Ind}_H^G M$.

In questo modo possiamo definire un funtore

$$\operatorname{Ind}_H^G : \{H\text{-moduli}\} \to \{G\text{-moduli}\}$$

Procediamo ad enunciare l'importante relazione fra i due funtori appena definiti.

Per ogni modulo M sia $\epsilon_M : M \otimes k[G] \to M$ la mappa lineare data da $\epsilon_M = \mathrm{Id}_M \overline{\otimes} \epsilon_G$

Proposizione 5.2.4 (Reciprocità di Frobenius)**.**
Sia H un sottogruppo di G e sia M un H-modulo.

(i) $\epsilon_M : \operatorname{Ind}_H^G M \to M$ *è un omomorfismo di H moduli;*

(ii) Per ogni G-modulo N la mappa $\phi \mapsto \epsilon_M \circ \phi$ definisce l'isomorfismo fra i seguenti spazi vettoriali:

$$\operatorname{Hom}_G(N, \operatorname{Ind}_H^G M) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Hom}_H(\operatorname{Res}_H^G N, M)$$

Capitolo 6

Il teorema di Borel-Weil

6.1 Spazi-Peso su G-Moduli

Questa breve sezione costituisce un'introduzione alla successiva, dove si dimostrerà il teorema di Borel-Weil. Qui fisseremo alcune notazioni, definiremo gli spazi-peso per moduli e proveremo qualche fatto a loro riguardo di interesse generale.

Sia G un gruppo algebrico lineare connesso riduttivo e sia T un suo toro massimale. Sia R il sistema di radici di (G, T) e consideriamo un sistema di radici positive $R^+ \subset R$. Sia D il sottoinsieme di R^+ costituito dalle radici semplici.

Per 4.1.6 e 4.1.7 possiamo considerare i sottogruppi U^+ e U^-, dove U^+ è generato da U_α con $\alpha \in R^+$ e U^- è generato da U_α con $\alpha \in -R^+$. Siano inoltre $B^+ = U^+T$ e $B^- = U^-T$ due sottogruppi di Borel, con U^+ e U^- parti unipotenti rispettivamente di B^+ e B^- sempre per i teoremi appena citati.

6.1.1. Ricordiamo che ogni T-modulo M ammette una decomposizione $M = \bigoplus_{\chi \in X(T)} M_\chi$ per 1.3.5. I caratteri per cui M_χ è non nullo si chiamano pesi di M, sottintendendo la rappresentazione di T su M.

Diciamo che un peso χ è massimale se lo è nell'ordinamento indotto dalla scelta del sistema di radici positive, cioè se $\chi + \sum_{\alpha \in R^+} n_\alpha \alpha$ non è un peso per M per nessun $n_\alpha \in \mathbb{N}$ al variare di $\alpha \in R^+$.

Lemma 6.1.2. *Sia M un G-modulo, allora $\dot{w}.M_\chi = M_{w.\chi}$ per $w \in W$, $\chi \in X(T)$, in particolare se χ è un peso di M, allora anche $w.\chi$ è un peso di M per $w \in W$.*

Dimostrazione. Per $t \in T$ e $m \in M_\chi$ si ha

$$t.(\dot{w}.m) = \dot{w}.((\dot{w}^{-1}t\dot{w}).m) = \dot{w}.(\chi(\dot{w}^{-1}t\dot{w})m) = ((w.\chi)(t))(\dot{w}.m)$$

cioè $\dot{w}.m \in M_{w.\chi}$, da cui $\dot{w}.M_\chi \subset M_{w.\chi}$. In modo simile si ha $\dot{w}^{-1}.M_{w.\chi} \subset M_\chi$, da cui l'uguaglianza $\dot{w}.M_\chi = M_{w.\chi}$. □

Lemma 6.1.3. *Sia M un G-modulo, χ un suo peso e $m \in M_\chi$. Per ogni $u \in U^+$ possiamo scrivere $u.m = m + m_1 + \cdots + m_k$ con $m_j \in M_{\chi_j}$ e $\chi_j > \chi$.*

Dimostrazione. Per 4.1.6 possiamo scrivere $u = u_{\alpha_1}(x_1)\dots u_{\alpha_k}(x_k)$ dove $R^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, quindi $u.m = u_{\alpha_1}(x_1).(u_{\alpha_2}(x_2).(\dots(u_{\alpha_k}(x_k).m)\dots))$. Assumendo la tesi vera per $u \in U_\alpha$ per ogni $\alpha \in R^+$ e applicandola più volte nel modo suggerito dalla precedente espressione si verifica il caso generale, quindi è sufficiente restringersi al caso $u = u_\alpha(x)$.

M è naturalmente un U_α modulo e la relativa azione è descritta dalla mappa di comodulo $\Delta_M : M \to M \otimes k[U_\alpha]$. Dato che $k \simeq U_\alpha$ tramite la mappa u_α, possiamo identificare $k[U_\alpha]$ con l'anello di polinomi $k[T]$. In questo modo, se $\Delta_M(m) = \sum_{i\geq 0} m_i \otimes T^i$ (con $m_i \neq 0$ solo per un numero finito di indici), allora

$$u_\alpha(x).m = \Delta_M(m)(x) = \sum_{i\geq 0} x^i m_i$$

Ponendo $x = 0$ si ottiene $m_0 = m$.

Prendiamo $t \in T$ e notiamo che

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 0} x^i(t.m_i) &= t.(u_\alpha(x).m) \\
&= (tu_\alpha(x)t^{-1}).(t.m) \\
&= \chi(t)(u_\alpha(\alpha(t)x).m) \\
&= \sum_{i\geq 0} \chi(t)(\alpha(t)x)^i m_i \\
&= \sum_{i\geq 0} (\chi + i\alpha)(t)x^i m_i
\end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{i\geq 0} x^i(t.m_i - (\chi + i\alpha)(t)m_i) = 0$$

Dovendo quest'uguaglianza valere per ogni $x \in k$, si deduce che $t.m_i = (\chi + i\alpha)(t)m_i$ per ogni i. Dall'arbitrarietà di $t \in T$ segue che $m_i \in M_{\chi+i\alpha}$ e naturalmente $\chi + i\alpha > \chi$ per $i > 0$, concludendo la dimostrazione.

□

Corollario 6.1.4. *Sia M un G-modulo e sia χ un suo peso massimale, allora*

$$M_\chi \subset M^{U^+}$$

Dimostrazione. Siano $m \in M_\chi$ e $u \in U^+$, allora applicando il precedente lemma e sfruttando la massimalità di χ otteniamo $u.m = m$, segue $M_\chi \subset M^{U^+}$. □

6.1.5. Per ogni carattere $\chi \in X(T)$ possiamo costruire un'azione di T su k data da $t.x = \chi(t)x$. Denotiamo il T-modulo così ottenuto con k_χ. Nel caso in cui χ è il carattere banale, cioè $\chi(t) = 1$ per ogni t, T agisce banalmente su k e indichiamo tale T-modulo semplicemente con k.

6.1.6. Ricordiamo che U^- è normalizzato da T, di conseguenza è un sottogruppo normale di $U^-T = B^-$. Possiamo quindi considerare la mappa quoziente $\pi : B^- \to B^-/U^- \simeq T$. Componendo un carattere $\chi \in X(T)$ con π otteniamo il carattere $\chi \circ \pi$ di B, che indicheremo sempre con χ senza specificare ogni volta l'estensione del dominio. Si può procedere allo stesso modo con B^+ al posto di B^-.

In maniera simile si può rendere ogni T-modulo un B^--modulo o un B^+-modulo, semplicemente componendo la rappresentazione con la mappa π.

6.2 Il Teorema di Borel-Weil

Questa sezione è la più importante dell'intera tesi, in quanto qui si enuncia e dimostra il teorema di Borel-Weil.

Brevemente, fissato un gruppo algebrico lineare G, connesso e riduttivo, il teorema in questione ci fornisce un sistema di rappresentanti per le classi di isomorfismo dei G-moduli semplici. Tali classi sono in bigezione con i pesi dominanti, un sottoinsieme dei caratteri $X = X^*(T)$ costituito dagli elementi il cui accoppiamento con ogni coradice è non-negativo. Più in dettaglio, per ogni peso dominante χ costruiremo un G-modulo semplice $L(\chi)$ avente χ come peso massimale.

Nella prima parte della sezione dimostreremo che le classi di isomorfismo dei G-moduli semplici sono rappresentate dai vari $L(\chi)$ non nulli al variare di $\chi \in X$. Solo alla fine svolgeremo la dimostrazione principale, provando che $L(\chi)$ è non nullo se e solo se χ è dominante. Tale dimostrazione farà estensivamente uso della teoria sviluppata nella prima parte della tesi, in particolare si avvarrà della decomposizione di Bruhat al fine di applicare il teorema di Hartogs (che andremo ad enunciare) per estendere una funzione e concludere che $L(\chi) \neq 0$.

Iniziamo subito con una proposizione che riutilizzeremo più volte e che ci permetterà di affermare che ogni G-modulo semplice è rappresentato da un qualche $L(\chi)$.

Proposizione 6.2.1. *Sia V un G-modulo con $V \neq 0$.*

(i) $V^{U^+} \neq 0$ *e* $V^{U^-} \neq 0$*;*

(ii) *Se* $\dim(V) < \infty$ *esistono* $\chi^+ \in X(T)$ *tale che* $\operatorname{Hom}_G(V, \operatorname{Ind}_{B^+}^G k_{\chi^+}) \neq 0$ *e* $\chi^- \in X(T)$ *tale che* $\operatorname{Hom}_G(V, \operatorname{Ind}_{B^-}^G k_{\chi^-}) \neq 0$*;*

Dimostrazione. Dato che U^+ e U^- sono unipotenti, grazie a 5.1.9 si trova $V^{U^+} \neq 0$ e $V^{U^-} \neq 0$.

Notiamo che T normalizza U^+, quindi stabilizza V^{U^+}, che di conseguenza è un T-sottomodulo di V. Sappiamo che V^{U^+} si decompone come somma diretta dei suoi spazi-peso, i quali corrispondono alle somme dirette di tutti i T-sottomoduli semplici di V^{U^+} isomorfi a k_χ al variare di χ fra i pesi di V^{U^+}. Sia χ^+ un peso di V^{U^+}, allora $\operatorname{Hom}_T(k_{\chi^+}, V^{U^+}) \neq 0$. Dato che U^+ agisce banalmente su V^{U^+}, l'azione di G su V induce un'azione di $B^+ = TU^+$ su V^{U^+} e ogni T-sottomodulo di V^{U^+} è anche un B^+-sottomodulo. Segue che anche $\mathrm{Hom}_{B^+}(k_{\chi^+}, V^{U^+}) \neq 0$ e perciò $\mathrm{Hom}_{B^+}(k_{\chi^+}, V) \neq 0$.

Dato un modulo su cui è definita un'azione di gruppo, possiamo considerare il suo duale (come spazio vettoriale) con la relativa azione naturalmente indotta. Si verifica che l'isomorfismo canonico di uno spazio vettoriale di dimensione finita con il suo biduale è anche un isomorfismo di moduli per azioni di gruppo. Sapendo che $\dim(V) < \infty$, per quanto appena detto esiste $-\chi^+ \in X(T)$ con $0 \neq \mathrm{Hom}_{B^+}(k_{-\chi^+}, V^*) \simeq \mathrm{Hom}_{B^+}(V, k^*_{-\chi^+})$, e dato che $k^*_{-\chi^+} \simeq k_{\chi^+}$ si trova $\mathrm{Hom}_{B^+}(V, k_{\chi^+}) \neq 0$.

Applicando la reciprocità di Frobenius 5.2.4 concludiamo che $\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_{B^+}^G k_{\chi^+}) \neq 0$. Con lo stesso ragionamento si dimostra che esiste $\chi^- \in X(T)$ tale che $\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_{B^-}^G k_{\chi^-}) \neq 0$.

□

Procediamo definendo e studiando le proprietà di $H^0(\chi)$, G-modulo che di rivelerà fondamentale per la costruzione dei rappresentanti $L(\chi)$.

Definizione 6.2.2. Per ogni $\chi \in X(T)$ sia

$$H^0(\chi) = \mathrm{Ind}_{B^-}^G k_\chi$$

Lemma 6.2.3. *Si ha*

$$H^0(\chi) = \{f \in k[G] \mid f(gb) = \chi(b)^{-1} f(g) \quad \forall g \in G, b \in B^-\}$$

sul quale G agisce per traslazione sinistra.

Dimostrazione. Ricordiamo che $H^0(\chi) = \mathrm{Ind}_{B^-}^G k_\chi = (k_\chi \otimes k[G])^{B^-}$, dove l'azione di $G \times B^-$ su $k_\chi \otimes k[G]$ è data da

$$\begin{aligned} \psi((h,b))(x \otimes f)(g) &= (b.x) \otimes f(h^{-1}gb) \\ &= (\chi(b)x) \otimes f(h^{-1}gb) \\ &= x \otimes (\chi(b) f(h^{-1}gb)) \end{aligned}$$

Possiamo identificare $k_\chi \otimes k[G]$ con $k[G]$ sul quale è definita l'azione $\widetilde{\psi}((h,b))(f)(g) = \chi(b) f(h^{-1}gb)$. Segue che $f \in H^0(\chi)$ se e solo se $f(g) = \chi(b) f(gb)$ per ogni $g \in G$, $b \in B^-$. Inoltre G agisce su $H^0(\chi)$ come $(h.f)(g) = f(h^{-1}g)$, cioè per traslazione sinistra. □

Proposizione 6.2.4. *Sia $\chi \in X(T)$ tale che $H^0(\chi) \neq 0$.*

(i) Si ha $\dim(H^0(\chi)^{U^+}) = 1$ e $H^0(\chi)^{U^+} = H^0(\chi)_\chi$;

(ii) Ogni peso τ di $H^0(\chi)$ soddisfa $w_0.\chi \leq \tau \leq \chi$.

Dimostrazione. Ogni $f \in H^0(\chi)^{U^+}$ soddisfa $f(u_1 t u_2) = \chi(t)^{-1} f(e)$ per ogni $u_1 \in U^+$, $t \in T$, $u_2 \in U^-$, quindi $f(e)$ determina completamente la funzione f ristretta a U^+B^-, e, vista la densità di U^+B^- in G per 4.2.7, anche f è completamente determinata da $f(e)$. Da ciò segue che $\dim(H^0(\chi)^{U^+}) \leq 1$ e, dato che $H^0(\chi) \neq 0$, per 6.2.1 (i) $H^0(\chi)^{U^+} \neq 0$, da cui si evince che la dimensione è esattamente 1.

Consideriamo la mappa di valutazione $\xi : H^0(\chi) \to k_\chi$ data da $\xi(f) = f(e)$: si tratta di un omomorfismo di B^- moduli, in quanto, per ogni $b \in B^-$, $f \in H^0(\chi)$

$$b.\xi(f) = \chi(b)f(e) = \chi(b^{-1})^{-1}f(e) = f(b^{-1}) = \xi(b.f)$$

ed è iniettiva su $H^0(\chi)^{U^+}$ per quanto appena mostrato. Dall'ultima equazione si ricava anche $\xi(b.f) = \xi(\chi(b)f)$, da cui $b.f = \chi(b)f$ per $f \in H^0(\chi)^{U^+}$, dunque $H^0(\chi)^{U^+} \subset H^0(\chi)_\chi$.

Sia M un G-sottomodulo finito-dimensionale di $H^0(\chi)$ e sia τ un suo peso massimale, allora $M_\tau \subset M^{U^+} \subset H^0(\chi)^{U^+}$ per 6.1.4. Combinando questa inclusione con quella mostrata nel precedente paragrafo si trova $M_\tau \subset H^0(\chi)_\chi$, da cui $M_\tau \subset M \cap H^0(\chi)_\chi = M_\chi$. Dato che due spazi-peso distinti hanno intersezione banale, troviamo $\tau = \chi$, cioè χ è l'unico peso massimale di M.

Dalla prima parte della dimostrazione sappiamo che $0 \neq H^0(\chi)^{U^+} \subset H^0(\chi)_\chi$, perciò χ è un peso di $H^0(\chi)$. Se esistesse un altro peso τ di $H^0(\chi)$ con $\tau > \chi$, grazie a 5.1.3 potremmo trovare un G-sottomodulo finito-dimensionale M con $M_\tau = M \cap H^0(\chi)_\tau \neq 0$ e raggiungere un assurdo visto che χ è un peso massimale di M per quanto appena mostrato. Segue che χ è l'unico peso massimale di $H^0(\chi)$, cioè $\tau \leq \chi$ per ogni peso τ di $H^0(\chi)$.

Dalla doppia inclusione $H^0(\chi)_\chi \subset H^0(\chi)^{U^+} \subset H^0(\chi)_\chi$ ottenuta sempre combinando 6.1.4 con il risultato della prima parte della dimostrazione, troviamo $H^0(\chi)^{U^+} = H^0(\chi)_\chi$.

Se τ è un peso di $H^0(\chi)$, anche $w_0.\tau$ lo è per 6.1.2, quindi $w_0.\tau \leq \chi$ e dunque concludiamo $\tau \geq w_0.\chi$ per 4.2.2. □

A questo punto possiamo definire gli $L(\chi)$ e mostrare che, al variare di $\chi \in X(T)$ con $H^0(\chi) \neq 0$, rappresentano i G-moduli semplici a meno di isomorfismo.

Definizione 6.2.5. Per ogni $\chi \in X(T)$ sia

$$L(\chi) = \operatorname{soc}_G H^0(\chi)$$

Corollario 6.2.6. *Sia $\chi \in X(T)$ tale che $H^0(\chi) \neq 0$, allora $L(\chi)$ è semplice.*

Dimostrazione. Per 5.1.6 (ii) sappiamo che $L(\chi) \neq 0$. Se esistessero due sottomoduli L_1, L_2 di $H^0(\chi)$ semplici e distinti, ricordando l'esattezza a sinistra del funtore punto fisso, da $L_1 \oplus L_2 \subset H^0(\chi)$ si avrebbe $L_1^{U^+} \oplus L_2^{U^+} = (L_1 \oplus L_2)^{U^+} \subset H^0(\chi)^{U^+}$, ma $L_1^{U^+}$ e $L_2^{U^+}$ sono non nulli per 6.2.1 (i) e quindi $\dim(H^0(\chi)^{U^+}) \geq 2$, assurdo per 6.2.4 (i). Concludiamo che $L(\chi)$ è semplice. □

Teorema 6.2.7.

(i) Ogni G-modulo semplice è isomorfo a esattamente un $L(\chi)$ con $\chi \in X(T)$ tale che $H^0(\chi) \neq 0$;

(ii) Sia $\chi \in X(T)$ con $H^0(\chi) \neq 0$. Allora $L(\chi)^{U^+} = L(\chi)_\chi$ e $\dim(L(\chi)^{U^+}) = 1$. Inoltre ogni peso τ di $L(\chi)$ soddisfa $w_0.\chi \leq \tau \leq \chi$. Infine la molteplicità di $L(\chi)$ come fattore di composizione di $H^0(\chi)$ è uguale a 1.

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando il punto (ii). Dato che $L(\chi) \neq 0$, per 6.2.1 (i) anche $L(\chi)^{U^+} \neq 0$. Utilizzando 6.2.4 (i) troviamo che $1 \leq \dim(L(\chi)^{U^+}) \leq \dim(H^0(\chi)^{U^+}) = 1$, da cui $L(\chi)^{U^+} = H^0(\chi)^{U^+}$, in particolare $\dim(L(\chi)^{U^+}) = 1$. Inoltre $L(\chi)_\chi = L(\chi) \cap H^0(\chi)_\chi = L(\chi) \cap H^0(\chi)^{U^+} = L(\chi)^{U^+}$. Un peso τ di $L(\chi)$ è anche un peso di $H^0(\chi)$, quindi per 6.2.4 (ii) soddisfa $w_0.\chi \leq \tau \leq \chi$.

$L(\chi)$, essendo un sottomodulo semplice di $H^0(\chi)$, è un suo fattore di composizione. Visto che $\dim(L(\chi)_\chi) = 1$, che $\dim(H^0(\chi)_\chi) = 1$ e che $V \mapsto V_\chi$ preserva le immersioni, in quanto funtore esatto a sinistra, e le somme dirette, si evince che la molteplicità di $L(\chi)$ nella serie di zoccoli di $H^0(\chi)$ non può essere maggiore di 1. Questo conclude la dimostrazione del punto (ii).

Per quanto riguarda il punto (i), detto V il G-modulo semplice in questione, per 6.2.1 (ii) esiste $\chi \in X(T)$ con $\mathrm{Hom}_G(V, H^0(\chi)) = \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_{B^-}^G k_\chi) \neq 0$. Sia $\phi \in \mathrm{Hom}_G(V, H^0(\chi))$ con $\phi \neq 0$, allora $\mathrm{Ker}(\phi)$ è un G-sottomodulo di V diverso da V, quindi $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$ per semplicità. Segue che $\mathrm{Im}(\phi) \simeq V$ è semplice, quindi $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathrm{soc}_G H^0(\chi) = L(\chi)$. Infine, dato che per 6.2.6 $L(\chi)$ è semplice e che $\mathrm{Im}(\phi) \neq 0$, si ha $\mathrm{Im}(\phi) \simeq L(\chi)$, perciò $V \simeq L(\chi)$.

Se per assurdo l'unicità non fosse verificata, esisterebbero $\chi, \chi' \in X(T)$ con $L(\chi) \simeq L(\chi')$, ma allora

$$L(\chi)_\chi = L(\chi)^{U^+} = L(\chi')^{U^+} = L(\chi')_{\chi'} = L(\chi)_{\chi'}$$

e $L(\chi)_\chi \neq 0$, assurdo in quanto due spazi-peso distinti hanno intersezione banale.

□

Lo scopo della restante parte della sezione è dimostrare che $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante, proprietà che definiamo subito:

6.2.8. Sia

$$\begin{aligned} X(T)_+ &= \{\chi \in X(T) \mid \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \quad \forall \alpha \in R^+\} \\ &= \{\chi \in X(T) \mid \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \quad \forall \alpha \in D\} \end{aligned}$$

Gli elementi di $X(T)_+$ sono chiamati *pesi dominanti* di T rispetto R^+.

Enunciamo, senza dimostrazione, il teorema di estensione di Hartogs, un risultato puramente di geometria algebrica che utilizzeremo nella dimostrazione finale nella forma data dal successivo corollario. Si ricordi la definizione di varietà normale, data in 1.5.1.

Lemma 6.2.9 (Teorema di estensione di Hartogs)**.** *Sia H una varietà algebrica normale e K un sottoinsieme chiuso di H di codimensione ≥ 2. Se f è una funzione regolare definita su $H \setminus K$, allora f si estende ad una funzione regolare su H.*

Data una radice $\alpha \in D$ poniamo $U^+_{\sim\alpha} = \prod_{\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}} U_\beta$. Si noti che $U^+_{\sim\alpha}$ è un sottogruppo di U^+ e $U^+ = U^+_{\sim\alpha} U_\alpha \simeq U^+_{\sim\alpha} \times U_\alpha$ come varietà per 4.2.3 e 2.3.6.

Corollario 6.2.10. *Sia f una funzione regolare definita su $U^+B^- \cup \bigcup_{\alpha \in D} \dot{s_\alpha} U^+ B^-$, allora f si estende a una funzione regolare su tutto G.*

Dimostrazione. Per 1.5.2 G è una varietà normale. Ricordiamo che U^+B^- è un aperto denso di G per 4.2.7, quindi $\dot{s_\alpha} U^+ B^-$ $(\alpha \in D)$ sono aperti, e di conseguenza $U^+B^- \cup \bigcup_{\alpha \in D} \dot{s_\alpha} U^+ B^-$ è un aperto di G. Da 2.3.6 e 4.1.4 si evince che $\dot{s_\alpha}$ normalizza $U^+_{\sim\alpha}$, quindi

$$\begin{aligned} U^+ \dot{s_\alpha} B^- &= U^+_{\sim\alpha} U_\alpha \dot{s_\alpha} B^- \\ &= \dot{s_\alpha} (\dot{s_\alpha}^{-1} U^+_{\sim\alpha} \dot{s_\alpha})(\dot{s_\alpha}^{-1} U_\alpha \dot{s_\alpha}) B^- \\ &= \dot{s_\alpha} U^+_{\sim\alpha} U_{-\alpha} B^- \\ &= \dot{s_\alpha} U^+_{\sim\alpha} B^- \\ &\subset \dot{s_\alpha} U^+ B^- \end{aligned}$$

Detto $H = G \setminus \left(U^+B^- \cup \bigcup_{\alpha \in D} \dot{s_\alpha} U^+ B^-\right)$, sappiamo che H è un chiuso di G, e ricordando 4.2.9 si trova

$$H \subset G \setminus \left(U^+B^- \cup \bigcup_{\alpha \in D} U^+ \dot{s_\alpha} B^- \right) = \bigcup_{w \in W \setminus (\{e\} \cup \{s_\alpha | \alpha \in D\})} U^+ \dot{w} B^-$$

Per 4.2.6 ognuna delle classi laterali al membro di destra ha codimensione ≥ 2, quindi anche la loro unione e di conseguenza H ha codimensione ≥ 2. A questo punto possiamo applicare il teorema di estensione di Hartogs alla funzione f ottenendo un'estensione regolare su tutto G. □

Siamo giunti alla dimostrazione più importante della tesi, ma anche alla più difficile. Nella seguente proposizione il punto particolarmente interessante è quello che afferma che se χ è un carattere dominante allora $H^0(\chi) \neq 0$. L'idea della dimostrazione è costruire in modo semi-esplicito un elemento non nullo di $H^0(\chi)$: si parte definendo una funzione non nulla sull'aperto denso U^+B^-, la si estende su $\dot{s_\alpha} U^+ B^-$ per ogni $\alpha \in D$ ed infine, attraverso il teorema di Hartogs, si ottiene una funzione definita su tutto G, che si verificherà appartenere a $H^0(\chi)$.

Proposizione 6.2.11. *Sia $\chi \in X(T)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) χ è dominante;

(b) $H^0(\chi) \neq 0$;

(c) Esiste un G-modulo V con $(V^{U^+})_\chi \neq 0$.

Dimostrazione.

(c) $\Rightarrow$ (b) Sia $v \in (V^{U^+})_\chi$ con $v \neq 0$, allora per 5.1.3 v è contenuto in un G-sottomodulo V' di V di dimensione finita, da cui $(V'^{U^+})_\chi \neq 0$. Consideriamo una serie di zoccoli $\mathrm{soc}_G^i V'$ di V'. Dato che V' ha dimensione finita esiste $n \in \mathbb{N}$ con $\mathrm{soc}_G^n V' = V'$, dunque $v \notin \mathrm{soc}_G^0 V' = 0$ mentre $v \in \mathrm{soc}_G^n V'$. Sia $j \in \mathbb{N}$ il più piccolo numero per cui $v \notin \mathrm{soc}_G^{j-1} V'$ e $v \in \mathrm{soc}_G^j V'$, allora $[v] \in \mathrm{soc}_G^j V' / \mathrm{soc}_G^{j-1} V' = \mathrm{soc}_G(V' / \mathrm{soc}_G^{j-1} V')$ e $[v] \neq 0$. Inoltre $[v]$ è fissato da U^+ e appartiene allo spazio-peso associato a χ esattamente come v, quindi $(\mathrm{soc}_G(V'/\mathrm{soc}_G^{j-1} V')^{U^+})_\chi = ((\mathrm{soc}_G^j V'/\mathrm{soc}_G^{j-1} V')^{U^+})_\chi \neq 0$. Per definizione $\mathrm{soc}_G(V'/\mathrm{soc}_G^{j-1} V')$ è somma diretta di G-moduli semplici, diciamo $\mathrm{soc}_G(V'/\mathrm{soc}_G^{j-1} V') = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, allora

$$\begin{aligned} 0 &\neq (\mathrm{soc}_G(V'/\mathrm{soc}_G^{j-1} V')^{U^+})_\chi \\ &= ((V_1 \oplus \cdots \oplus V_k)^{U^+})_\chi \\ &= (V_1^{U^+} \oplus \cdots \oplus V_k^{U^+})_\chi \\ &= (V_1^{U^+})_\chi \oplus \cdots \oplus (V_k^{U^+})_\chi \end{aligned}$$

Ne deduciamo che esiste un G-modulo semplice V_i con $(V_i^{U^+})_\chi \neq 0$, quindi possiamo ricondurci al caso V semplice.

Per 6.2.7 (i) V è isomorfo a $L(\tau)$ per un qualche $\tau \in X(T)$ tale che $H^0(\tau) \neq 0$. Utilizzando 6.2.7 (ii) si trova che

$$0 \neq (V^{U^+})_\chi = (L(\tau)^{U^+})_\chi = (L(\tau)_\tau)_\chi$$

Dato che due spazi-peso distinti hanno intersezione banale, si deve avere $\tau = \chi$, da cui $H^0(\chi) \neq 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Prendiamo $V = H^0(\chi)$, allora per 6.2.4 (i)

$$(V^{U^+})_\chi = (H^0(\chi)^{U^+})_\chi = (H^0(\chi)_\chi)_\chi = H^0(\chi)_\chi = H^0(\chi)^{U^+}$$

che, sempre per 6.2.4 (i), è non nullo in quanto ha dimensione positiva.

(b) $\Rightarrow$ (a) Dato che $H^0(\chi) \neq 0$, per 6.2.4 (i) si ha che $(H^0(\chi))_\chi \neq 0$. Da 6.1.2 segue che per ogni $\alpha \in R^+$, $s_\alpha.\chi$ è un peso di $H^0(\chi)$, dunque $s_\alpha.\chi \leq \chi$ per 6.2.4 (ii). Ma $s_\alpha.\chi = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha$, segue che $\langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha \geq 0$ e quindi $\langle \chi, \alpha^\vee \rangle \geq 0$, cioè χ è dominante.

(a) $\Rightarrow$ (b) Ricordando la caratterizzazione di $H^0(\chi)$ data in 6.2.3, ci basta trovare una funzione regolare $f : G \to k$ non nulla tale che $f(gtu) = \chi(t)^{-1} f(g)$ $(g \in G, t \in T, u \in U^-)$.

Definiamo una funzione regolare f_χ su U^+TU^-, che ricordiamo essere un aperto denso per 4.2.7, ponendo $f_\chi(u_1 t u_2) = \chi(t)^{-1}$ $(u_1 \in U^+, t \in T, u_2 \in U^-)$. Si vede immediatamente che la definizione è ben posta e che $f_\chi \neq 0$. Supponiamo che per ogni radice semplice $\alpha \in D$ la restrizione di f_χ all'insieme $\dot{s_\alpha} U^+ B^- \cap U^+ B^-$ si estenda a una funzione regolare su $\dot{s_\alpha} U^+ B^-$. Prese $\alpha, \beta \in D$, le estensioni di f_χ agli insiemi $\dot{s_\alpha} U^+ B^-$ e $\dot{s_\beta} U^+ B^-$ coincidono su $\dot{s_\alpha} U^+ B^- \cap \dot{s_\beta} U^+ B^-$ in quanto coincidono su $\dot{s_\alpha} U^+ B^- \cap \dot{s_\beta} U^+ B^- \cap U^+ B^-$ e quest'ultimo è un aperto denso, visto che la proprietà di essere un aperto denso viene conservata dalle riflessioni semplici e dalle intersezioni finite. Dunque è possibile estendere f_χ a una funzione regolare su $U^+ B^- \cup \bigcup_{\alpha \in D} \dot{s_\alpha} U^+ B^-$. Utilizzando 6.2.10 possiamo estendere ulteriormente f_χ su tutto G. Fissati $t \in T$ e $u \in U^-$, per ogni $g = u_1 t' u_2 \in U^+ T U^-$ vale l'uguaglianza

$$f_\chi(gtu) = f_\chi(u_1(tt')((t'^{-1} u_1 t') u_2)) = \chi(tt')^{-1} = \chi(t)^{-1} f_\chi(u_1 t' u_2) = \chi(t)^{-1} f_\chi(g)$$

segue che tale relazione è soddisfatta anche sulla chiusura $\overline{U^+ T U^-} = G$. Dall'arbitrarietà di t e u si conclude che f_χ è un elemento non nullo di $H^0(\chi)$.

Data una radice semplice $\alpha \in D$, è sufficiente mostrare che f_χ ristretta all'insieme $\dot{s_\alpha} U^+ B^- \cap U^+ B^-$ si estende a una funzione regolare su $\dot{s_\alpha} U^+ B^-$. Visto che $\dot{s_\alpha}$ normalizza $U^+_{\sim\alpha}$ per 2.3.6 e 4.1.4, si ha

$$\dot{s_\alpha} U^+ B^- = U^+_{\sim\alpha} \dot{s_\alpha} U_\alpha B^-$$

Sia u_α un isomorfismo tra k e U_α come descritto in 4.1.1 e similmente definiamo $u_{-\alpha}$. La mappa $\phi : U^+_{\sim\alpha} \times k \times T \times U^- \to \dot{s_\alpha} U^+ B^-$ definita da $\phi(u_1, x, t, u) = u_1 \dot{s_\alpha} u_\alpha(x) t u$ è un isomorfismo di varietà per il risultato precedente, per 1.7.6 e dato che $U^+ \cap B^- = \{0\}$.

Utilizzando 1.9.5 è possibile scegliere u_α, $u_{-\alpha}$ in modo che esista un omomorfismo $\psi_\alpha : \mathbf{SL}_2 \to G$ con

$$u_\alpha(x) = \psi_\alpha \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad u_{-\alpha}(x) = \psi_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha^\vee(x) = \psi_\alpha \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$$

inoltre, detto $n_\alpha = u_\alpha(1) u_{-\alpha}(-1) u_\alpha(1)$, si ha $n_\alpha \in N_G(T)$ e l'immagine di n_α in W è s_α.

Allora

$$\begin{aligned} n_\alpha u_\alpha(x) = u_\alpha(1) u_{-\alpha}(-1) u_\alpha(1) u_\alpha(x) &= \psi_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -x \end{pmatrix} \\ &= u_\alpha(-x^{-1}) \alpha^\vee(-x^{-1}) u_{-\alpha}(x^{-1}) \end{aligned}$$

per ogni $x \in k^*$.

Scegliendo $\dot{s_\alpha} = n_\alpha$ si vede che

$$\begin{aligned}\phi(u_1, x, t, u) &= u_1 \dot{s_\alpha} u_\alpha(x) tu \\ &= u_1 u_\alpha(-x^{-1})\alpha^\vee(-x^{-1})u_{-\alpha}(x^{-1})tu \\ &= u_1 u_\alpha(-x^{-1})\alpha^\vee(-x^{-1})tu_{-\alpha}((-\alpha)(t^{-1})x^{-1})u \\ &= (u_1 u_\alpha(-x^{-1}))((\alpha^\vee(-x^{-1})t)u_{-\alpha}(\alpha(t)x^{-1})u) \\ &\in U^+B^-\end{aligned}$$

per ogni $u_1 \in U^+_{\sim\alpha}, x \in k^*, t \in T, u \in U^-$, da cui

$$f_\chi(u_1 \dot{s_\alpha} u_\alpha(x)tu) = \chi(\alpha^\vee(-x^{-1})t)^{-1} = \chi(t)^{-1}\chi(\alpha^\vee(-x)) = \chi(t)^{-1}(-x)^{\langle\chi,\alpha^\vee\rangle}$$

Dato che $\langle\chi, \alpha^\vee\rangle \geq 0$ per ipotesi, possiamo estendere il dominio di f_χ da $U^+_{\sim\alpha} \times k^* \times T \times U^-$ a $U^+_{\sim\alpha} \times k \times T \times U^-$, cioè a $\dot{s_\alpha}U^+B^-$, concludendo la dimostrazione.

□

Unendo i vari risultati ottenuti si ottiene il teorema di Borel-Weil:

Corollario 6.2.12 (Borel-Weil). *L'insieme $\{L(\chi) \mid \chi \in X(T)_+\}$ fornisce un sistema di rappresentanti per le classi di isomorfismo dei G-moduli semplici.*

Dimostrazione. Il corollario discende direttamente da 6.2.6, da 6.2.7 (i) e da 6.2.11. □

Osservazione. Nessuna delle dimostrazioni di questa sezione, o anche di questo capitolo, utilizza direttamente il fatto che k abbia caratteristica 0. In effetti tale ipotesi viene utilizzata esclusivamente in alcuni lemmi riguardanti la struttura di G nella prima parte della tesi, con lo scopo di semplificare le dimostrazioni ma senza essere strettamente necessaria. Sviluppata una teoria sui gruppi algebrici lineari in caratteristica p analoga a quella in caratteristica 0, le dimostrazioni e i teoremi presentati, in particolare quello di Borel-Weil, rimangono validi.

Osservazione. In caratteristica 0 si può ottenere un risultato aggiuntivo, cioè che tutti i G-moduli sono semi-semplici, da cui $L(\chi) = H^0(\chi)$ per $\chi \in X(T)$. Questo fatto, oltre a semplificare l'enunciato del teorema di Borel-Weil, ci permetterà di trovare dei rappresentanti alternativi in modo puramente geometrico, come vedremo nella prossima sezione.

6.3 Rappresentanti Alternativi per i G-Moduli Semplici

In questa sezione enunceremo una formulazione alternativa del teorema di Borel-Weil, più in particolare forniremo dei rappresentanti alternativi per le classi di isomorfismo dei G-moduli semplici, ottenuti mediante una costruzione del tutto diversa da quella mostrata in precedenza. Tale costruzione è, in un certo senso, più geometrica, in quanto riguarda le sezioni di un fibrato lineare, cioè un fibrato vettoriale di dimensione uno, sullo spazio quoziente G/B^-. Inoltre è la formulazione più nota di questo teorema, in parte perché esiste un teorema analogo per le rappresentazioni di gruppi di Lie formulato in questo modo.

Il primo obbiettivo della sezione è definire E_χ per ogni carattere χ, fibrato lineare di cui andremo a considerare le sezioni.

Il sottogruppo di Borel B^- è chiuso per definizione, quindi per 1.6.6 esiste il quoziente G/B^-, il quale ha la struttura di varietà quasi proiettiva. Sia $\pi_{G/B^-} : G \to G/B^-$ la relativa proiezione. Si ricordi inoltre la definizione di sezione locale data in 1.6.9.

Lemma 6.3.1. *π_{G/B^-} ammette sezioni locali.*

Dimostrazione. In modo simile a come fatto nella dimostrazione di 6.2.10, notiamo che $U^+\dot{w}B^- \subset \dot{w}U^+B^-$ per $w \in W$. Dato che $U^+\dot{w}B^-$ ricoprono G per 4.2.9 e che U^+B^- è aperto per 4.2.7, $\dot{w}U^+B^-$ costituisce un ricoprimento finito di aperti di G, saturi rispetto la proiezione π_{G/B^-}. Segue che $\pi_{G/B^-}(\dot{w}U^+B^-)$ è un ricoprimento aperto finito di G/B^-

Supponiamo esista una sezione locale $\sigma_e : \pi_{G/B^-}(U^+B^-) \to G$, allora per ogni $w \in W$, possiamo costruire una sezione locale $\sigma_w : \pi_{G/B^-}(\dot{w}U^+B^-) \to G$ con $\sigma_w([u]) = \dot{w}\sigma_e([u])$.

Procediamo a costruire σ_e. Per 4.2.5 (ii) si ha $U^+ \times B^- \simeq U^+B^-$ tramite la mappa $\phi(u, b) = ub$, allora $\pi_{G/B^-}(U^+B^-) \simeq (U^+B^-)/B^- \simeq (U^+ \times B^-)/B^- \simeq U^+$ tramite $[u] \mapsto u$. Utilizzando l'isomorfismo appena trovato possiamo porre $\sigma_e([u]) = \phi(u, e)$. □

Sia $\chi \in X(T)$ un carattere di T. Rendiamo G un B^--spazio facendo agire B^- come traslazione destra.

Ricordando 1.6.10, possiamo considerare il fibrato di G/B^- associato a k_χ:

$$E_\chi = G \times_{B^-} k_\chi = (G \times k_\chi)/B^-$$

cioè lo spazio prodotto quozientato per l'azione di B^-, la quale agisce singolarmente sui due spazi. In altre parole, se $[(g_1, z_1)], [(g_2, z_2)] \in E_\chi$ e $[(g_1, z_1)] = [(g_2, z_2)]$, allora esiste $b \in B^-$ con $(g_1, z_1) = (g_2b^{-1}, \chi(b)z_2)$. Indichiamo con π_{E_χ} la proiezione $G \times k_\chi \to E_\chi$.

Definiamo una struttura di G-spazio su G/B^- e su E_χ, nel primo caso mediante l'azione $h.[g] = [hg]$ e nel secondo caso mediante l'azione $h.[(g, z)] = [(hg, z)]$. Entrambe le azioni sono razionali per definizione di quoziente, vedasi 1.6.1 e 1.6.10.

Consideriamo la mappa $\pi_\chi : E_\chi \to G/B^-$ definita da $\pi_\chi([(g, z)]) = [g]$. Si verifica facilmente che è ben definita, suriettiva ed equivariante per l'azione di G. Per quanto riguarda la regolarità, detta $\pi_1 : G \times k_\chi \to G$ la proiezione sulla prima componente, si vede che $\pi_{G/B^-} \circ \pi_1$ è un morfismo invariante per l'azione di B^-, quindi passa al quoziente definendo il morfismo $\pi_\chi : E_\chi \to G/B^-$.

Introduciamo ora l'insieme delle sezioni $\Gamma(G/B^-, E_\chi)$, spazio che si rivelerà essere isomorfo a $H^0(\chi)$, fornendo il collegamento cercato con il teorema di Borel-Weil.

Definizione 6.3.2. Sia $\Gamma(G/B^-, E_\chi)$ l'insieme delle sezioni del fibrato lineare π_χ:

$$\Gamma(G/B^-, E_\chi) = \{\sigma : G/B^- \to E_\chi \mid \sigma \text{ regolare}, \ \pi_\chi \circ \sigma = \mathrm{Id}_{G/B^-}\}$$

$\Gamma(G/B^-, E_\chi)$ ha una naturale struttura di spazio vettoriale, con le operazioni di somma e moltiplicazione per scalare definite puntualmente sulle fibre: date $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(G/B^-, E_\chi)$, $[g] \in G/B^-$ e $r \in k$ con $\sigma_1([g]) = [(g, z_1)]$ e $\sigma_2([g]) = [(g, z_2)]$, poniamo $(\sigma_1 + \sigma_2)([g]) = [(g, z_1 + z_2)]$ e $(r\sigma_1)([g]) = [(g, rz_1)]$. Si verifica facilmente che $\sigma_1 + \sigma_2$ e $r\sigma_1$ sono ben definite e sono elementi di $\Gamma(G/B^-, E_\chi)$.

Il seguente è il teorema centrale di questa sezione e motiva le costruzioni effettuate finora.

Teorema 6.3.3. *$\Gamma(G/B^-, E_\chi)$ e $H^0(\chi)$ sono isomorfi come moduli.*

Dimostrazione. Ricordiamo che per 6.2.3

$$H^0(\chi) = \{f \in k[G] \mid f(gb) = \chi(b)^{-1} f(g) \quad \forall g \in G, b \in B^-\}$$

Definiamo la mappa lineare $\xi : H^0(\chi) \to \Gamma(G/B^-, E_\chi)$ ponendo $\xi(f)([g]) = [(g, f(g))]$. Affinché sia un omomorfismo di moduli, è necessario che ξ sia ben definita, lineare e che effettivamente abbia immagine in $\Gamma(G/B^-, E_\chi)$.

La linearità è immediata, notiamo poi che ξ è ben definita, in quanto

$$\begin{aligned}
\xi(f)([gb]) &= [(gb, f(gb))] \\
&= [(g(b^{-1})^{-1}, \chi(b^{-1}) f(g))] \\
&= [(g, f(g))] \\
&= \xi(f)([g])
\end{aligned}$$

Mostriamo che $\xi(f) \in \Gamma(G/B^-, E_\chi)$ per ogni $f \in H^0(\chi)$. Si vede subito che $(\pi_\chi \circ \xi(f))([g]) = \pi_\chi([g, f(g)]) = [g]$, cioè che $\pi_\chi \circ \xi(f) = \mathrm{Id}_{G/B^-}$, resta da dimostrare che $\xi(f)$ è una funzione regolare. Consideriamo il morfismo $\pi_{E_\chi} \circ (\mathrm{Id}, f) : G \to E_\chi$ e notiamo che è invariante per l'azione di B^-, quindi definisce al quoziente il morfismo $\xi(f) : G/B^- \to E_\chi$.

Mostriamo l'iniettività di ξ: presa $f \in \mathrm{Ker}(\xi)$, abbiamo che $\xi(f)([g]) = 0$ per ogni $g \in G$, cioè $f(g) = 0$ per ogni $g \in G$, dunque $f = 0$, da cui $\mathrm{Ker}(\xi) = 0$.

Mostriamo la suriettività di ξ: data $\sigma \in \Gamma(G/B^-, E_\chi)$, procediamo a costruire $f \in H^0(\chi)$ tale che $\xi(f) = \sigma$. Per $g \in G$, $\sigma([g])$ è una classe di equivalenza di elementi di $G \times k_\chi$, di cui uno e uno solo della forma (g, x_g) per qualche $x_g \in k_\chi$. Poniamo $f(g) = x_g$ e procediamo a mostrare che $f \in k[G]$, che $f(gb) = \chi(b)^{-1} f(g)$ per ogni $g \in G$, $b \in B^-$ e che $\xi(f) = \sigma$. Per la seconda verifica, si noti che $[gb, x_{gb}] = [g, x_g] = [gb, \chi(b)^{-1} x_g]$, da cui $f(gb) = \chi(b)^{-1} f(g)$, mentre per l'ultima basta vedere che $\xi(f)([g]) = [(g, f(g))] = [(g, x_g)] = \sigma([g])$. Concentriamoci ora sulla regolarità di f.

Ricordiamo che $\dot{w}U^+B^-$ al variare di $w \in W$ costituisce un ricoprimento aperto finito di G, così come $\dot{w}U^+B^- \times k_\chi$ è un ricoprimento aperto finito di $G \times k_\chi$.

Da 4.2.5 (ii) sappiamo che $U^+ \times B^- \simeq U^+B^-$ attraverso la moltiplicazione, Vediamo poi che $\pi_{G/B^-}(\dot{w}U^+B^-) \simeq (\dot{w}U^+ \times B^-)/B^- \simeq \dot{w}U^+$ e $\pi_{E_\chi}(\dot{w}U^+B^- \times k_\chi) \simeq (\dot{w}U^+ \times B^- \times k_\chi)/B^- \simeq \dot{w}U^+ \times k_\chi$ al variare di $w \in W$ sono ricoprimenti aperti rispettivamente di G/B^- e E_χ: per quest'ultimo, si ricordi la costruzione di E_χ descritta in 1.6.10 mediante le sezioni locali costruite in 6.3.1.

Restringendo la mappa σ a $\pi_{G/B^-}(\dot{w}U^+B^-)$, tramite gli isomorfismi mostrati si ottiene una mappa da $\dot{w}U^+$ in $\dot{w}U^+ \times k_\chi$, che indicheremo sempre con σ. Consideriamo il seguente diagramma, di cui si verifica facilmente la commutatività:

$$\begin{tikzcd}
\dot{w}U^+B^- \arrow[r, "(\mathrm{Id},f)"] \arrow[d, "\simeq"] & \dot{w}U^+B^- \times k_\chi \arrow[d, "\simeq"] \\
\dot{w}U^+ \times B^- \arrow[r, "(\sigma,\mathrm{Id})"] & \dot{w}U^+ \times k_\chi \times B^-
\end{tikzcd}$$

Ne deduciamo che $(\mathrm{Id}, f)|_{\dot{w}U^+B^-}$ è un morfismo su $\dot{w}U^+B^- \times k_\chi$ per ogni $w \in W$, quindi si conclude che anche f è un morfismo.

Unendo i pezzi, si conclude che ξ è un isomorfismo di moduli fra $H^0(\chi)$ e $\Gamma(G/B^-, E_\chi)$.

□

Definiamo una struttura di G-modulo su $\Gamma(G/B^-, E_\chi)$: consideriamo l'azione definita da

$$(h.\sigma)([g]) = h.(\sigma(h^{-1}.[g]))$$

Che quest'azione manda sezioni in sezioni è facile da vedere: $h \circ \sigma \circ h^{-1} : G/B^- \to E_\chi$ è un morfismo in quanto composizione di morfismi e

$$\pi_\chi \circ h \circ \sigma \circ h^{-1} = h \circ \pi_\chi \circ \sigma \circ h^{-1} = h \circ h^{-1} = \mathrm{Id}_{G/B^-}$$

Vediamo poi che ξ è G-equivariante, in quanto

$$\begin{aligned}
\xi(h.f)([g]) &= [(g, (h.f)(g))] \\
&= [(g, f(h^{-1}g))] \\
&= h.[(h^{-1}g, f(h^{-1}g))] \\
&= h.(\xi(f)([h^{-1}g])) \\
&= (h.\xi(f))([g])
\end{aligned}$$

L'isomorfismo fra $H^0(\chi)$ e $\Gamma(G/B^-, E_\chi)$ ci permette di definire una struttura di G-modulo su $\Gamma(G/B^-, E_\chi)$ a partire da quella di $H^0(\chi)$, la cui azione è proprio quella appena mostrata vista l'equivarianza di ξ.

Possiamo ora rafforzare il precedente teorema enunciando un risultato che ci permetterà di presentare la formulazione alternativa del teorema di Borel-Weil.

Corollario 6.3.4. $\Gamma(G/B^-, E_\chi)$ *e* $H^0(\chi)$ *sono isomorfi come* G*-moduli.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal precedente teorema e dalle successive osservazioni. □

Introduciamo i rappresentanti alternativi:

Definizione 6.3.5. Per ogni $\chi \in X(T)$ sia

$$V_\chi = \mathrm{soc}_G \, \Gamma(G/B^-, E_\chi)$$

Dal precedente corollario segue immediatamente che $V_\chi \simeq L_\chi$, quindi otteniamo il seguente:

Teorema 6.3.6 (Borel-Weil)**.**
L'insieme $\{V_\chi \mid \chi \in X(T)_+\}$ fornisce un sistema di rappresentanti per le classi di isomorfismo dei G-moduli semplici.

Dimostrazione. Il teorema è conseguenza diretta di 6.2.12 e del precedente risultato. □

Osservazione. Come osservato nella precedente sezione, in caratteristica 0 tutti i G-moduli sono semi-semplici, quindi $V_\chi = \Gamma(G/B^-, E_\chi)$ per ogni $\chi \in X(T)$.

Bibliografia

[Hum72] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. 1ª ed. Graduate Texts in Mathematics. 1972.

[Hum75] J. E. Humphreys. *Linear Algebraic Groups*. 1ª ed. Graduate Texts in Mathematics. 1975.

[Jan03] J. C. Jantzen. *Representations of Algebraic Groups*. 2ª ed. Mathematical Surveys and Monographs. 2003.

[Mum99] David Mumford. *The Red Book of Varieties and Schemes*. 2ª ed. Lecture Notes in Mathematics. 1999.

[Spr98] T. A. Springer. *Linear Algebraic Groups*. 2ª ed. Modern Birkhäuser Classics. 1998.