Il Teorema di Borel-Weil

Candidato: Eduardo Venturini
Relatore: prof. Andrea Maffei

Università di Pisa

15 Luglio 2022

G-moduli

G-moduli

Sia G un gruppo e M uno spazio vettoriale su un campo k algebricamente chiuso.

G-moduli

Sia G un gruppo e M uno spazio vettoriale su un campo k algebricamente chiuso.

Definizione - G-Modulo

Un G-modulo M è uno spazio vettoriale sul quale è definita un'azione di G costituita da mappa lineari.

G-moduli

Sia G un gruppo e M uno spazio vettoriale su un campo k algebricamente chiuso.

Definizione - G-Modulo

Un G-modulo M è uno spazio vettoriale sul quale è definita un'azione di G costituita da mappa lineari.

Tale azione può essere vista come un omomorfismo $G \to \mathbf{GL}(M)$ e si chiama rappresentazione di G su M.

G-moduli

Sia G un gruppo e M uno spazio vettoriale su un campo k algebricamente chiuso.

Definizione - G-Modulo

Un G-modulo M è uno spazio vettoriale sul quale è definita un'azione di G costituita da mappa lineari.

Tale azione può essere vista come un omomorfismo $G \to \mathbf{GL}(M)$ e si chiama rappresentazione di G su M.

Un G-sottomodulo è un sottospazio vettoriale di un G-modulo chiuso per l'azione di G indotta.

G-moduli

Sia G un gruppo e M uno spazio vettoriale su un campo k algebricamente chiuso.

Definizione - G-Modulo

Un G-modulo M è uno spazio vettoriale sul quale è definita un'azione di G costituita da mappa lineari.

Tale azione può essere vista come un omomorfismo $G \to \mathbf{GL}(M)$ e si chiama rappresentazione di G su M.

Un G-sottomodulo è un sottospazio vettoriale di un G-modulo chiuso per l'azione di G indotta.

Definizione - G-Modulo Semplice

Un G-modulo M si dice semplice e la relativa rappresentazione irriducibile se è non nullo e i suoi unici G-sottomoduli sono 0 e M.

Il teorema di Borel-Weil

Il teorema di Borel-Weil

Problema

Dato un gruppo G, possiamo classificare tutti i G-moduli semplici a meno di isomorfismo?

Il teorema di Borel-Weil

Problema

Dato un gruppo G, possiamo classificare tutti i G-moduli semplici a meno di isomorfismo?

Soluzione per gruppi di matrici

Il teorema di Borel-Weil fornisce un insieme di rappresentanti per le classi di equivalenza dei G-moduli semplici sotto le seguenti assunzioni:

- G è gruppo di matrici con determinate proprietà;
- l'azione di G su M si può esprimere come un insieme di funzioni regolari, cioè funzioni razionali definite ovunque nelle componenti della matrice e del vettore.

Problema

Dato un gruppo G, possiamo classificare tutti i G-moduli semplici a meno di isomorfismo?

Soluzione per gruppi di matrici

Il teorema di Borel-Weil fornisce un insieme di rappresentanti per le classi di equivalenza dei G-moduli semplici sotto le seguenti assunzioni:

- G è gruppo di matrici con determinate proprietà;
- l'azione di G su M si può esprimere come un insieme di funzioni regolari, cioè funzioni razionali definite ovunque nelle componenti della matrice e del vettore.

In questa presentazione enunceremo il teorema di Borel-Weil e ne illustreremo brevemente la dimostrazione.

Il teorema di Borel-Weil

Problema

Dato un gruppo G, possiamo classificare tutti i G-moduli semplici a meno di isomorfismo?

Soluzione per gruppi di matrici

Il teorema di Borel-Weil fornisce un insieme di rappresentanti per le classi di equivalenza dei G-moduli semplici sotto le seguenti assunzioni:

- G è gruppo di matrici con determinate proprietà;
- l'azione di G su M si può esprimere come un insieme di funzioni regolari, cioè funzioni razionali definite ovunque nelle componenti della matrice e del vettore.

In questa presentazione enunceremo il teorema di Borel-Weil e ne illustreremo brevemente la dimostrazione.
Per semplicità ci restringiamo al caso in cui k è un campo di caratteristica 0 e $G = \mathbf{GL}_n(k)$, tuttavia le idee utilizzate si possono facilmente generalizzare a classi di gruppi più ampie.

Tori e caratteri

Tori e caratteri

Definizione - Toro Massimale

Il toro massimale T di G è il sottogruppo di G costituito dalle matrici diagonali.

Tori e caratteri

Definizione - Toro Massimale

Il toro massimale T di G è il sottogruppo di G costituito dalle matrici diagonali.

Definizione - Caratteri

Un carattere di χ di T è un omomorfismo razionale da T nel gruppo moltiplicativo k^*.

Tori e caratteri

Definizione - Toro Massimale

Il toro massimale T di G è il sottogruppo di G costituito dalle matrici diagonali.

Definizione - Caratteri

Un carattere di χ di T è un omomorfismo razionale da T nel gruppo moltiplicativo k^*.

Sia $X = X(T)$ l'insieme dei caratteri.

Tori e caratteri

Definizione - Toro Massimale

Il toro massimale T di G è il sottogruppo di G costituito dalle matrici diagonali.

Definizione - Caratteri

Un carattere di χ di T è un omomorfismo razionale da T nel gruppo moltiplicativo k^*.

Sia $X = X(T)$ l'insieme dei caratteri.

I caratteri di T sono le funzioni

$$\mathrm{diag}(g_{11}, \ldots, g_{nn}) \mapsto g_{11}^{a_1} \ldots g_{nn}^{a_n}$$

con $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Tori e caratteri

Definizione - Toro Massimale

Il toro massimale T di G è il sottogruppo di G costituito dalle matrici diagonali.

Definizione - Caratteri

Un carattere di χ di T è un omomorfismo razionale da T nel gruppo moltiplicativo k^*.

Sia $X = X(T)$ l'insieme dei caratteri.

I caratteri di T sono le funzioni

$$\mathrm{diag}(g_{11}, \dots, g_{nn}) \mapsto g_{11}^{a_1} \dots g_{nn}^{a_n}$$

con $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

X è un gruppo abeliano isomorfo a $\mathbb{Z}^n$.
Siano $\epsilon_i(\mathrm{diag}(g_{11}, \dots, g_{nn})) = g_{ii}$ per $1 \leq i \leq n$.
$(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ costituiscono una base dei caratteri.

Pesi dominanti e anticipazione sul teorema di Borel-Weil

Pesi dominanti e anticipazione sul teorema di Borel-Weil

Definizione - Pesi Dominanti

Un carattere $\chi = a_1\epsilon_1 + \cdots + a_n\epsilon_n \in X$ è un peso dominante se $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$.

Sia X_+ l'insieme dei pesi dominanti.

Pesi dominanti e anticipazione sul teorema di Borel-Weil

Definizione - Pesi Dominanti

Un carattere $\chi = a_1\epsilon_1 + \cdots + a_n\epsilon_n \in X$ è un peso dominante se $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$.

Sia X_+ l'insieme dei pesi dominanti.

Enunciato parziale di Borel-Weil

I pesi dominanti sono in bigezione con i G-moduli semplici a meno di isomorfismo.

Pesi dominanti e anticipazione sul teorema di Borel-Weil

Definizione - Pesi Dominanti

Un carattere $\chi = a_1\epsilon_1 + \cdots + a_n\epsilon_n \in X$ è un peso dominante se $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$.

Sia X_+ l'insieme dei pesi dominanti.

Enunciato parziale di Borel-Weil

I pesi dominanti sono in bigezione con i G-moduli semplici a meno di isomorfismo.

La forma completa del teorema di Borel-Weil ci fornisce un modulo semplice per ogni peso dominante. Procediamo a costruire tali rappresentanti.

Costruzione dei rappresentanti canonici

Costruzione dei rappresentanti canonici

Sia B^+ il gruppo delle matrici triangolari superiori e B^- quello delle triangolari inferiori.

Costruzione dei rappresentanti canonici

Sia B^+ il gruppo delle matrici triangolari superiori e B^- quello delle triangolari inferiori.
Dato un carattere $\chi : T \to k^*$, possiamo estenderne il dominio a B^- utilizzando la proiezione $B^- \to T$, la quale è un omomorfismo di gruppi.

Costruzione dei rappresentanti canonici

Sia B^+ il gruppo delle matrici triangolari superiori e B^- quello delle triangolari inferiori.
Dato un carattere $\chi : T \to k^*$, possiamo estenderne il dominio a B^- utilizzando la proiezione $B^- \to T$, la quale è un omomorfismo di gruppi.
Indichiamo con $k[G]$ le funzioni regolari di G, cioè le funzioni razionali nelle componenti delle matrici definite ovunque.

Costruzione dei rappresentanti canonici

Sia B^+ il gruppo delle matrici triangolari superiori e B^- quello delle triangolari inferiori.
Dato un carattere $\chi : T \to k^*$, possiamo estenderne il dominio a B^- utilizzando la proiezione $B^- \to T$, la quale è un omomorfismo di gruppi.
Indichiamo con $k[G]$ le funzioni regolari di G, cioè le funzioni razionali nelle componenti delle matrici definite ovunque.

Definizione - $H^0(\chi)$

Sia

$$H^0(\chi) = \{f \in k[G] \mid f(gb) = \chi(b)^{-1} f(g) \quad \forall g \in G, b \in B^-\}$$

con la struttura di G-modulo data dalla traslazione sinistra.

Costruzione dei rappresentanti canonici

Sia B^+ il gruppo delle matrici triangolari superiori e B^- quello delle triangolari inferiori.
Dato un carattere $\chi : T \to k^*$, possiamo estenderne il dominio a B^- utilizzando la proiezione $B^- \to T$, la quale è un omomorfismo di gruppi.
Indichiamo con $k[G]$ le funzioni regolari di G, cioè le funzioni razionali nelle componenti delle matrici definite ovunque.

Definizione - $H^0(\chi)$

Sia

$$H^0(\chi) = \{f \in k[G] \mid f(gb) = \chi(b)^{-1} f(g) \quad \forall g \in G, b \in B^-\}$$

con la struttura di G-modulo data dalla traslazione sinistra.

Sia $L(\chi)$ la somma diretta di tutti i sottomoduli semplici di $H^0(\chi)$.
In caratteristica 0 si può dimostrare che $L(\chi) = H^0(\chi)$.

Teorema di Borel-Weil e dimostrazione

Teorema - Borel-Weil

L'insieme $\{L(\chi) \mid \chi \in X_+\}$ è un sistema di rappresentanti per le classi di isomorfismo dei G-moduli semplici.

Teorema di Borel-Weil e dimostrazione

Teorema - Borel-Weil

L'insieme $\{L(\chi) \mid \chi \in X_+\}$ è un sistema di rappresentanti per le classi di isomorfismo dei G-moduli semplici.

Lemma 1 - Dimostrazione di Borel-Weil

Sia $\chi \in X$ tale che $H^0(\chi) \neq 0$, allora $L(\chi)$ è semplice.

Teorema di Borel-Weil e dimostrazione

Teorema - Borel-Weil

L'insieme $\{L(\chi) \mid \chi \in X_+\}$ è un sistema di rappresentanti per le classi di isomorfismo dei G-moduli semplici.

Lemma 1 - Dimostrazione di Borel-Weil

Sia $\chi \in X$ tale che $H^0(\chi) \neq 0$, allora $L(\chi)$ è semplice.

Lemma 2 - Dimostrazione di Borel-Weil

Ogni G-modulo semplice è isomorfo ad esattamente un $L(\chi)$ con $H^0(\chi) \neq 0$.

Teorema di Borel-Weil e dimostrazione

Teorema - Borel-Weil

L'insieme $\{L(\chi) \mid \chi \in X_+\}$ è un sistema di rappresentanti per le classi di isomorfismo dei G-moduli semplici.

Lemma 1 - Dimostrazione di Borel-Weil

Sia $\chi \in X$ tale che $H^0(\chi) \neq 0$, allora $L(\chi)$ è semplice.

Lemma 2 - Dimostrazione di Borel-Weil

Ogni G-modulo semplice è isomorfo ad esattamente un $L(\chi)$ con $H^0(\chi) \neq 0$.

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Teorema di Borel-Weil e dimostrazione

Teorema - Borel-Weil

L'insieme $\{L(\chi) \mid \chi \in X_+\}$ è un sistema di rappresentanti per le classi di isomorfismo dei G-moduli semplici.

Lemma 1 - Dimostrazione di Borel-Weil

Sia $\chi \in X$ tale che $H^0(\chi) \neq 0$, allora $L(\chi)$ è semplice.

Lemma 2 - Dimostrazione di Borel-Weil

Ogni G-modulo semplice è isomorfo ad esattamente un $L(\chi)$ con $H^0(\chi) \neq 0$.

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Introduciamo alcuni concetti per dimostrare il lemma 3.

Cocaratteri e accoppiamento

Cocaratteri e accoppiamento

Definizione - Cocaratteri

Un cocarattere λ di T è un omomorfismo razionale da k^* in T.

Sia $X^\vee = X^\vee(T)$ l'insieme dei cocaratteri.

Cocaratteri e accoppiamento

Definizione - Cocaratteri

Un cocarattere λ di T è un omomorfismo razionale da k^* in T.

Sia $X^\vee = X^\vee(T)$ l'insieme dei cocaratteri.

I cocaratteri di T sono le funzioni

$$x \mapsto \mathrm{diag}(x^{a_1}, \dots, x^{a_n})$$

con $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Cocaratteri e accoppiamento

Definizione - Cocaratteri

Un cocarattere λ di T è un omomorfismo razionale da k^* in T.

Sia $X^\vee = X^\vee(T)$ l'insieme dei cocaratteri.

I cocaratteri di T sono le funzioni

$$x \mapsto \operatorname{diag}(x^{a_1}, \ldots, x^{a_n})$$

con $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

$X^\vee$ è un gruppo abeliano isomorfo a $\mathbb{Z}^n$, naturalmente isomorfo a $\operatorname{Hom}(X, \mathbb{Z})$.
Siano $\theta_i(x) = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, x, 1, \ldots, 1)$ per $1 \leq i \leq n$.
$(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ costituiscono una base dei cocaratteri.

Cocaratteri e accoppiamento

Definizione - Cocaratteri

Un cocarattere λ di T è un omomorfismo razionale da k^* in T.

Sia $X^\vee = X^\vee(T)$ l'insieme dei cocaratteri.

I cocaratteri di T sono le funzioni

$$x \mapsto \operatorname{diag}(x^{a_1}, \ldots, x^{a_n})$$

con $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

$X^\vee$ è un gruppo abeliano isomorfo a $\mathbb{Z}^n$, naturalmente isomorfo a $\operatorname{Hom}(X, \mathbb{Z})$.
Siano $\theta_i(x) = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, x, 1, \ldots, 1)$ per $1 \leq i \leq n$.
$(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ costituiscono una base dei cocaratteri.

Definizione - Accoppiamento

Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X^\vee \to \mathbb{Z}$ l'accoppiamento dato dalla dualità di X e $X^\vee$.

Cocaratteri e accoppiamento

Definizione - Cocaratteri

Un cocarattere λ di T è un omomorfismo razionale da k^* in T.

Sia $X^\vee = X^\vee(T)$ l'insieme dei cocaratteri.

I cocaratteri di T sono le funzioni

$$x \mapsto \mathrm{diag}(x^{a_1}, \dots, x^{a_n})$$

con $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

$X^\vee$ è un gruppo abeliano isomorfo a $\mathbb{Z}^n$, naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{Z})$.
Siano $\theta_i(x) = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, x, 1, \dots, 1)$ per $1 \leq i \leq n$.
$(\theta_1, \dots, \theta_n)$ costituiscono una base dei cocaratteri.

Definizione - Accoppiamento

Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X^\vee \to \mathbb{Z}$ l'accoppiamento dato dalla dualità di X e $X^\vee$.

Siano $\chi = a_1\epsilon_1 + \cdots + a_n\epsilon_n$ e $\lambda = b_1\theta_1 + \cdots + b_n\theta_n$, allora

$$\langle \chi, \lambda \rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

Pesi e Spazi-Peso

Pesi e Spazi-Peso

Teorema - Decomposizione di T-Moduli

Ogni T-modulo M si può esprimere come somma diretta di T-moduli di dimensione 1.

Pesi e Spazi-Peso

Teorema - Decomposizione di T-Moduli

Ogni T-modulo M si può esprimere come somma diretta di T-moduli di dimensione 1.

Ogni G-modulo è un T-modulo in modo naturale.

Pesi e Spazi-Peso

Teorema - Decomposizione di T-Moduli

Ogni T-modulo M si può esprimere come somma diretta di T-moduli di dimensione 1.

Ogni G-modulo è un T-modulo in modo naturale.
L'azione di T su uno spazio vettoriale di dimensione 1 è data dalla moltiplicazione per un carattere:

$$g.v \mapsto \chi(g)v$$

Pesi e Spazi-Peso

Teorema - Decomposizione di T-Moduli

Ogni T-modulo M si può esprimere come somma diretta di T-moduli di dimensione 1.

Ogni G-modulo è un T-modulo in modo naturale.
L'azione di T su uno spazio vettoriale di dimensione 1 è data dalla moltiplicazione per un carattere:

$$g.v \mapsto \chi(g)v$$

Sia M_χ il sottospazio di M sul quale T agisce moltiplicativamente attraverso il carattere χ.

Pesi e Spazi-Peso

Teorema - Decomposizione di T-Moduli

Ogni T-modulo M si può esprimere come somma diretta di T-moduli di dimensione 1.

Ogni G-modulo è un T-modulo in modo naturale.
L'azione di T su uno spazio vettoriale di dimensione 1 è data dalla moltiplicazione per un carattere:

$$g.v \mapsto \chi(g)v$$

Sia M_χ il sottospazio di M sul quale T agisce moltiplicativamente attraverso il carattere χ.

Definizione - Pesi e Spazi-Peso

Dato un T-modulo M, gli spazi-peso di M sono i sottospazi M_χ non nulli e i pesi di M sono i caratteri χ relativi agli spazi-peso.

Radici

Radici

Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di G. Possiamo definire una struttura di G-modulo su $\mathfrak{g}$ attraverso la rappresentazione aggiunta Ad.

Radici

Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di G. Possiamo definire una struttura di G-modulo su $\mathfrak{g}$ attraverso la rappresentazione aggiunta Ad.

Definizione - Radici

Le radici di G rispetto T sono i pesi non nulli della rappresentazione Ad di T su $\mathfrak{g}$.

Sia R l'insieme delle radici.

Radici

Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di G. Possiamo definire una struttura di G-modulo su $\mathfrak{g}$ attraverso la rappresentazione aggiunta Ad.

Definizione - Radici

Le radici di G rispetto T sono i pesi non nulli della rappresentazione Ad di T su $\mathfrak{g}$.

Sia R l'insieme delle radici.

L'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G è $\mathfrak{gl}_n(k)$ e la rappresentazione aggiunta è data dal coniugio, quindi

$$R = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$$

Lo spazio-peso associato alla radice $\epsilon_i - \epsilon_j$ è ke_{ij}, dove e_{ij} è la matrice nulla ovunque tranne per un 1 nella riga i e colonna j.

Radici positive e ordinamento

Radici positive e ordinamento

Definizione - Sottogruppo di Borel

Il sottogruppo di Borel B^+ di G è il sottogruppo di G costituito dalle matrici triangolari superiori.

Radici positive e ordinamento

Definizione - Sottogruppo di Borel

Il sottogruppo di Borel B^+ di G è il sottogruppo di G costituito dalle matrici triangolari superiori.

Definizione - Radici Positive

Le radici positive sono i pesi non nulli associati alla rappresentazione Ad sull'algebra di Lie di B^+.

Sia R^+ l'insieme delle radici positive.

Radici positive e ordinamento

Definizione - Sottogruppo di Borel

Il sottogruppo di Borel B^+ di G è il sottogruppo di G costituito dalle matrici triangolari superiori.

Definizione - Radici Positive

Le radici positive sono i pesi non nulli associati alla rappresentazione Ad sull'algebra di Lie di B^+.

Sia R^+ l'insieme delle radici positive.

Le radici positive di G sono

$$R^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

Radici positive e ordinamento

Definizione - Sottogruppo di Borel

Il sottogruppo di Borel B^+ di G è il sottogruppo di G costituito dalle matrici triangolari superiori.

Definizione - Radici Positive

Le radici positive sono i pesi non nulli associati alla rappresentazione Ad sull'algebra di Lie di B^+.

Sia R^+ l'insieme delle radici positive.

Le radici positive di G sono

$$R^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

Definiamo un ordinamento parziale su X:

$$\chi_1 \geq \chi_2 \iff \exists (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n : \quad \chi_1 - \chi_2 = \sum_{\alpha_j \in R^+} a_j \alpha_j$$

Coradici

Coradici

Definizione - Coradici

Per ogni radice $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j \in R$ sia $\alpha^\vee = \theta_i - \theta_j \in X^\vee$. I cocaratteri $\alpha^\vee$ così ottenuti si dicono coradici e costituiscono l'insieme $R^\vee$.

Coradici

Definizione - Coradici

Per ogni radice $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j \in R$ sia $\alpha^\vee = \theta_i - \theta_j \in X^\vee$. I cocaratteri $\alpha^\vee$ così ottenuti si dicono coradici e costituiscono l'insieme $R^\vee$.

Definizione - Riflessione

Per ogni radice α sia $s_\alpha : X \to X$ la funzione definita da $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$. s_α si dice riflessione.

Coradici

Definizione - Coradici

Per ogni radice $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j \in R$ sia $\alpha^\vee = \theta_i - \theta_j \in X^\vee$. I cocaratteri $\alpha^\vee$ così ottenuti si dicono coradici e costituiscono l'insieme $R^\vee$.

Definizione - Riflessione

Per ogni radice α sia $s_\alpha : X \to X$ la funzione definita da $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$. s_α si dice riflessione.

Si noti che $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ e $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$.

Coradici

Definizione - Coradici

Per ogni radice $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j \in R$ sia $\alpha^\vee = \theta_i - \theta_j \in X^\vee$. I cocaratteri $\alpha^\vee$ così ottenuti si dicono coradici e costituiscono l'insieme $R^\vee$.

Definizione - Riflessione

Per ogni radice α sia $s_\alpha : X \to X$ la funzione definita da $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$. s_α si dice riflessione.

Si noti che $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ e $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$.

Per ogni $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$ sia $\dot{s_\alpha} = \mathrm{Id} - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} - e_{ji}$, cioè restringendo $\dot{s_\alpha}$ ai sottospazi i-esimo e j-esimo $\dot{s_\alpha}|_{ij} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$\dot{s_\alpha} \in N_G(T)$, quindi agisce sui caratteri permutandoli. L'azione è quella di s_α.

Coradici

Definizione - Coradici

Per ogni radice $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j \in R$ sia $\alpha^\vee = \theta_i - \theta_j \in X^\vee$. I cocaratteri $\alpha^\vee$ così ottenuti si dicono coradici e costituiscono l'insieme $R^\vee$.

Definizione - Riflessione

Per ogni radice α sia $s_\alpha : X \to X$ la funzione definita da $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$. s_α si dice riflessione.

Si noti che $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ e $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$.

Per ogni $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$ sia $\dot{s_\alpha} = \mathrm{Id} - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} - e_{ji}$, cioè restringendo $\dot{s_\alpha}$ ai sottospazi i-esimo e j-esimo $\dot{s_\alpha}|_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\dot{s_\alpha} \in N_G(T)$, quindi agisce sui caratteri permutandoli. L'azione è quella di s_α.

Definizione alternativa - Pesi Dominanti

Un carattere $\chi \in X$ è un peso dominante se $\langle \chi, \alpha^\vee \rangle \geq 0$ per ogni $\alpha \in R^+$.

Dimostrazione del Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \implies \chi \in X_+$

Dimostrazione del Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \implies \chi \in X_+$

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Dimostrazione del Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \implies \chi \in X_+$

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Lemma

Sia $\chi \in X$ tale che $H^0(\chi) \neq 0$, allora χ è un peso di $H^0(\chi)$ e ogni peso τ di $H^0(\chi)$ soddisfa $\tau \leq \chi$.

Dimostrazione del Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \implies \chi \in X_+$

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Lemma

Sia $\chi \in X$ tale che $H^0(\chi) \neq 0$, allora χ è un peso di $H^0(\chi)$ e ogni peso τ di $H^0(\chi)$ soddisfa $\tau \leq \chi$.

Dimostrazione Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \implies \chi \in X_+$

Dimostrazione del Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longrightarrow \chi \in X_+$

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Lemma

Sia $\chi \in X$ tale che $H^0(\chi) \neq 0$, allora χ è un peso di $H^0(\chi)$ e ogni peso τ di $H^0(\chi)$ soddisfa $\tau \leq \chi$.

Dimostrazione Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longrightarrow \chi \in X_+$

- Data $\alpha \in R^+$ e preso un rappresentante $\dot{s_\alpha} \in N_G(T)$ di s_α, si verifica che $\dot{s_\alpha}.(H^0(\chi))_\chi \subset (H^0(\chi))_{s_\alpha . \chi}$.

Dimostrazione del Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longrightarrow \chi \in X_+$

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Lemma

Sia $\chi \in X$ tale che $H^0(\chi) \neq 0$, allora χ è un peso di $H^0(\chi)$ e ogni peso τ di $H^0(\chi)$ soddisfa $\tau \leq \chi$.

Dimostrazione Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longrightarrow \chi \in X_+$

- Data $\alpha \in R^+$ e preso un rappresentante $\dot{s_\alpha} \in N_G(T)$ di s_α, si verifica che $\dot{s_\alpha}.(H^0(\chi))_\chi \subset (H^0(\chi))_{s_\alpha.\chi}$.
- $s_\alpha.\chi$ è un peso di $H^0(\chi)$, quindi $s_\alpha.\chi \leq \chi$.

Dimostrazione del Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \implies \chi \in X_+$

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Lemma

Sia $\chi \in X$ tale che $H^0(\chi) \neq 0$, allora χ è un peso di $H^0(\chi)$ e ogni peso τ di $H^0(\chi)$ soddisfa $\tau \leq \chi$.

Dimostrazione Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \implies \chi \in X_+$

- Data $\alpha \in R^+$ e preso un rappresentante $\dot{s_\alpha} \in N_G(T)$ di s_α, si verifica che $\dot{s_\alpha}.(H^0(\chi))_\chi \subset (H^0(\chi))_{s_\alpha.\chi}$.
- $s_\alpha.\chi$ è un peso di $H^0(\chi)$, quindi $s_\alpha.\chi \leq \chi$.
- $0 \leq \chi - s_\alpha.\chi = \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha$, perciò $\langle \chi, \alpha^\vee \rangle \geq 0$.

Dimostrazione del Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \implies \chi \in X_+$

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Lemma

Sia $\chi \in X$ tale che $H^0(\chi) \neq 0$, allora χ è un peso di $H^0(\chi)$ e ogni peso τ di $H^0(\chi)$ soddisfa $\tau \leq \chi$.

Dimostrazione Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \implies \chi \in X_+$

- Data $\alpha \in R^+$ e preso un rappresentante $\dot{s_\alpha} \in N_G(T)$ di s_α, si verifica che $\dot{s_\alpha}.(H^0(\chi))_\chi \subset (H^0(\chi))_{s_\alpha.\chi}$.
- $s_\alpha.\chi$ è un peso di $H^0(\chi)$, quindi $s_\alpha.\chi \leq \chi$.
- $0 \leq \chi - s_\alpha.\chi = \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha$, perciò $\langle \chi, \alpha^\vee \rangle \geq 0$.

Per mostrare l'altra implicazione si procede costruendo una funzione regolare non banale appartenente a $H^0(\chi)$.
Prima però sono necessari alcuni risultati aggiuntivi.

Radici semplici e gruppo di Weyl

Radici semplici e gruppo di Weyl

Definizione - Radici Semplici

Le radici semplici sono gli elementi minimali di R^+.

Sia D l'insieme delle radici semplici.

Radici semplici e gruppo di Weyl

Definizione - Radici Semplici

Le radici semplici sono gli elementi minimali di R^+.

Sia D l'insieme delle radici semplici.

Le radici semplici di G sono

$$D = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} \mid 1 \leq i < n\}$$

Radici semplici e gruppo di Weyl

Definizione - Radici Semplici

Le radici semplici sono gli elementi minimali di R^+.

Sia D l'insieme delle radici semplici.

Le radici semplici di G sono

$$D = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} \mid 1 \leq i < n\}$$

Le riflessioni semplici sono le riflessioni associate alle radici semplici, cioè s_α con $\alpha \in D$.

Radici semplici e gruppo di Weyl

Definizione - Radici Semplici

Le radici semplici sono gli elementi minimali di R^+.

Sia D l'insieme delle radici semplici.

Le radici semplici di G sono

$$D = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} \mid 1 \leq i < n\}$$

Le riflessioni semplici sono le riflessioni associate alle radici semplici, cioè s_α con $\alpha \in D$.

Definizione - Gruppo di Weyl

Il gruppo di Weyl W di G è $W = N_G(T)/Z_G(T)$.

Radici semplici e gruppo di Weyl

Definizione - Radici Semplici

Le radici semplici sono gli elementi minimali di R^+.

Sia D l'insieme delle radici semplici.

Le radici semplici di G sono

$$D = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} \mid 1 \leq i < n\}$$

Le riflessioni semplici sono le riflessioni associate alle radici semplici, cioè s_α con $\alpha \in D$.

Definizione - Gruppo di Weyl

Il gruppo di Weyl W di G è $W = N_G(T)/Z_G(T)$.

s_α è indotta da $\dot{s_\alpha} \in N_G(T)$, quindi $s_\alpha \in W$ per $\alpha \in R$.

Radici semplici e gruppo di Weyl

Definizione - Radici Semplici

Le radici semplici sono gli elementi minimali di R^+.

Sia D l'insieme delle radici semplici.

Le radici semplici di G sono

$$D = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} \mid 1 \leq i < n\}$$

Le riflessioni semplici sono le riflessioni associate alle radici semplici, cioè s_α con $\alpha \in D$.

Definizione - Gruppo di Weyl

Il gruppo di Weyl W di G è $W = N_G(T)/Z_G(T)$.

s_α è indotta da $\dot{s_\alpha} \in N_G(T)$, quindi $s_\alpha \in W$ per $\alpha \in R$.
W agisce sui caratteri permutando fedelmente le radici, quindi si può identificare con un sottogruppo delle permutazioni di R. Si verifica che $W \simeq S_n$.

Radici semplici e gruppo di Weyl

Definizione - Radici Semplici

Le radici semplici sono gli elementi minimali di R^+.

Sia D l'insieme delle radici semplici.

Le radici semplici di G sono

$$D = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} \mid 1 \leq i < n\}$$

Le riflessioni semplici sono le riflessioni associate alle radici semplici, cioè s_α con $\alpha \in D$.

Definizione - Gruppo di Weyl

Il gruppo di Weyl W di G è $W = N_G(T)/Z_G(T)$.

s_α è indotta da $\dot{s_\alpha} \in N_G(T)$, quindi $s_\alpha \in W$ per $\alpha \in R$.
W agisce sui caratteri permutando fedelmente le radici, quindi si può identificare con un sottogruppo delle permutazioni di R. Si verifica che $W \simeq S_n$.
Dato un elemento $w \in W$, indichiamo con $\dot{w}$ un suo rappresentante in $N_G(T)$.

Decomposizione di Bruhat

Decomposizione di Bruhat

Sia U^+ la parte unipotente di B^+, cioè il sottogruppo di B^+ costituito dalle matrici triangolari superiori con le entrate della diagonale uguali ad 1.

Decomposizione di Bruhat

Sia U^+ la parte unipotente di B^+, cioè il sottogruppo di B^+ costituito dalle matrici triangolari superiori con le entrate della diagonale uguali ad 1.

Lemma - Decomposizione di Bruhat

G è unione disgiunta delle classi laterali doppie $U^+\dot{w}B^-$ per $w \in W$.

Decomposizione di Bruhat

Sia U^+ la parte unipotente di B^+, cioè il sottogruppo di B^+ costituito dalle matrici triangolari superiori con le entrate della diagonale uguali ad 1.

Lemma - Decomposizione di Bruhat

G è unione disgiunta delle classi laterali doppie $U^+\dot{w}B^-$ per $w \in W$.

Lemma - Codimensione delle classi laterali doppie

La classe laterale doppia U^+B^- corrispondente a $w = \mathrm{Id}$ è un aperto denso di G e ha codimensione 0. Le classi laterali doppie $U^+\dot{s_\alpha}B^-$ corrispondenti alle riflessioni semplici hanno codimensione 1. Le altre classi laterali doppie hanno codimensione maggiore di 1.

Decomposizione di Bruhat

Sia U^+ la parte unipotente di B^+, cioè il sottogruppo di B^+ costituito dalle matrici triangolari superiori con le entrate della diagonale uguali ad 1.

Lemma - Decomposizione di Bruhat

G è unione disgiunta delle classi laterali doppie $U^+\dot{w}B^-$ per $w \in W$.

Lemma - Codimensione delle classi laterali doppie

La classe laterale doppia U^+B^- corrispondente a $w = \mathrm{Id}$ è un aperto denso di G e ha codimensione 0. Le classi laterali doppie $U^+\dot{s_\alpha}B^-$ corrispondenti alle riflessioni semplici hanno codimensione 1. Le altre classi laterali doppie hanno codimensione maggiore di 1.

Teorema - Estensione di Hartogs

Se K è un sottoinsieme aperto di G il cui complementare ha codimensione maggiore di 1, allora ogni funzione regolare su K si estende a una funzione regolare su G.

Dimostrazione del Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longleftarrow \chi \in X_+$

Dimostrazione del Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longleftarrow \chi \in X_+$

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Dimostrazione del Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longleftarrow \chi \in X_+$

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Dimostrazione Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longleftarrow \chi \in X_+$

Dimostrazione del Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longleftarrow \chi \in X_+$

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Dimostrazione Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longleftarrow \chi \in X_+$

- Poniamo $f_\chi : U^+ T U^-$ con $f_\chi(u_1 t u_2) = \chi(t)^{-1}$.

Dimostrazione del Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longleftarrow \chi \in X_+$

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Dimostrazione Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longleftarrow \chi \in X_+$

- Poniamo $f_\chi : U^+ T U^-$ con $f_\chi(u_1 t u_2) = \chi(t)^{-1}$.
- $f \in H^0(\chi)$ se e solo se $f(gb) = \chi(b)^{-1} f(g)$ $(g \in G, b \in B^-)$, quindi è sufficiente estendere f_χ su G affinché $H^0(\chi) \neq 0$.

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Dimostrazione Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longleftarrow \chi \in X_+$

- Poniamo $f_\chi : U^+TU^-$ con $f_\chi(u_1 t u_2) = \chi(t)^{-1}$.
- $f \in H^0(\chi)$ se e solo se $f(gb) = \chi(b)^{-1} f(g)$ $(g \in G, b \in B^-)$, quindi è sufficiente estendere f_χ su G affinché $H^0(\chi) \neq 0$.
- Per il teorema di Hartogs è sufficiente estendere f_χ su $U^+ \dot{s}_\alpha B^- \subset \dot{s}_\alpha U^+ B^-$

Dimostrazione del Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longleftarrow \chi \in X_+$

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Dimostrazione Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longleftarrow \chi \in X_+$

- Poniamo $f_\chi : U^+TU^-$ con $f_\chi(u_1tu_2) = \chi(t)^{-1}$.
- $f \in H^0(\chi)$ se e solo se $f(gb) = \chi(b)^{-1}f(g)$ $(g \in G, b \in B^-)$, quindi è sufficiente estendere f_χ su G affinché $H^0(\chi) \neq 0$.
- Per il teorema di Hartogs è sufficiente estendere f_χ su $U^+\dot{s_\alpha}B^- \subset \dot{s_\alpha}U^+B^-$
- Si verifica che, per un certo sottogruppo $U_\alpha^+ \subset U$, si ha

$$\dot{s_\alpha}U^+B^- \simeq U_\alpha^+ \times k \times T \times U^-$$
$$U^+B^- \cap \dot{s_\alpha}U^+B^- \simeq U_\alpha^+ \times k^* \times T \times U^-$$

Dimostrazione del Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longleftarrow \chi \in X_+$

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Dimostrazione Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longleftarrow \chi \in X_+$

- Poniamo $f_\chi : U^+ T U^-$ con $f_\chi(u_1 t u_2) = \chi(t)^{-1}$.
- $f \in H^0(\chi)$ se e solo se $f(gb) = \chi(b)^{-1} f(g)$ $(g \in G, b \in B^-)$, quindi è sufficiente estendere f_χ su G affinché $H^0(\chi) \neq 0$.
- Per il teorema di Hartogs è sufficiente estendere f_χ su $U^+ \dot{s_\alpha} B^- \subset \dot{s_\alpha} U^+ B^-$
- Si verifica che, per un certo sottogruppo $U_\alpha^+ \subset U$, si ha

$$\dot{s_\alpha} U^+ B^- \simeq U_\alpha^+ \times k \times T \times U^-$$

$$U^+ B^- \cap \dot{s_\alpha} U^+ B^- \simeq U_\alpha^+ \times k^* \times T \times U^-$$

- Per $(u_1, x, t, u) \in U_\alpha^+ \times k^* \times T \times U^-$ si ha una scrittura del tipo

$$f_\chi(u_1 \dot{s_\alpha} u_\alpha(x) t u) = \chi(t)^{-1} (-x)^{\langle \chi, \alpha^\vee \rangle}$$

Dimostrazione del Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longleftarrow \chi \in X_+$

Lemma 3 - Dimostrazione di Borel-Weil

Per ogni $\chi \in X$, $H^0(\chi) \neq 0$ se e solo se χ è dominante.

Dimostrazione Lemma 3 - $H^0(\chi) \neq 0 \Longleftarrow \chi \in X_+$

- Poniamo $f_\chi : U^+TU^-$ con $f_\chi(u_1 t u_2) = \chi(t)^{-1}$.
- $f \in H^0(\chi)$ se e solo se $f(gb) = \chi(b)^{-1} f(g)$ ($g \in G, b \in B^-$), quindi è sufficiente estendere f_χ su G affinché $H^0(\chi) \neq 0$.
- Per il teorema di Hartogs è sufficiente estendere f_χ su $U^+\dot{s}_\alpha B^- \subset \dot{s}_\alpha U^+ B^-$
- Si verifica che, per un certo sottogruppo $U_\alpha^+ \subset U$, si ha
$$\dot{s}_\alpha U^+ B^- \simeq U_\alpha^+ \times k \times T \times U^-$$
$$U^+B^- \cap \dot{s}_\alpha U^+ B^- \simeq U_\alpha^+ \times k^* \times T \times U^-$$
- Per $(u_1, x, t, u) \in U_\alpha^+ \times k^* \times T \times U^-$ si ha una scrittura del tipo
$$f_\chi(u_1 \dot{s}_\alpha u_\alpha(x) t u) = \chi(t)^{-1}(-x)^{\langle \chi, \alpha^\vee \rangle}$$
- Ci basta estendere f_χ in $x = 0$, possibile in quanto $\langle \chi, \alpha^\vee \rangle \geq 0$.

Bibliografia

[1] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. 1ª ed. Graduate Texts in Mathematics. 1972.

[2] J. E. Humphreys. *Linear Algebraic Groups*. 1ª ed. Graduate Texts in Mathematics. 1975.

[3] J. C. Jantzen. *Representations of Algebraic Groups*. 2ª ed. Mathematical Surveys and Monographs. 2003.

[4] David Mumford. *The Red Book of Varieties and Schemes*. 2ª ed. Lecture Notes in Mathematics. 1999.

[5] T. A. Springer. *Linear Algebraic Groups*. 2ª ed. Modern Birkhäuser Classics. 1998.